

JOURNAL
INTERNATIONAL
D'ACOUSTIQUE

sous le patronage
du Groupement des Acousticiens
de Langue Française

INTERNATIONAL
JOURNAL
ON ACOUSTICS

sponsored by the Acoustics Group
of the Physical Society
(Great Britain)

INTERNATIONALE
AKUSTISCHE
ZEITSCHRIFT

unter Mitwirkung
des Verbandes der Deutschen
Physikalischen Gesellschaften

ACUSTICA

edited by

Prof. Dr. C. W. KOSTEN

editor-in-chief

DELFT

publié par

Dr. F. CANAC

MARSEILLE

assisté par

Dr. E. G. RICHARDSON

NEWCASTLE UPON TYNE

assisted by

herausgegeben von

Prof. Dr. E. MEYER

GÖTTINGEN

unter Mitarbeit von

Prof. W. FURRER, Bern; Prof. Dr. A. GIACOMINI, Roma; Prof. Dr. J. HOLTSMARK, Oslo

Prof. Dr. F. INGERSLEV, København; Prof. Dr. A. VAN ITTERBEEK, Leuven; Prof. Dr. E. SKUDRZYK, Wien

S. HIRZEL VERLAG · ZÜRICH

Vol. 5

1955

ACUSTICA

Satz und Druck der ACUSTICA: AG. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zürich
Satz und Druck des Akustischen Beiheftes: L. C. Wittich, Druckerei und Verlag, Darmstadt

DIE VIERPOLERSATZSCHALTBILDER DER ELEKTROMECHANISCHEN WANDLER

Teil I

von W. REICHARDT und A. LENK

Mitteilung aus dem Institut für Elektro- und Bauakustik der Technischen Hochschule Dresden

Zusammenfassung

Für die einfachen elektroakustischen Wandler (elektrostatische, elektromagnetische und elektrodynamische Wandler) werden in dem vorliegenden I. Teil die beiden möglichen Vierpolersatzschaltbilder unter Benutzung von je zwei besonders einfachen elektromechanischen Kopplungsvierpolen aufgestellt und mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen miteinander verglichen. Die magnetostriktiven und piezoelektrischen Wandler sollen in dem später erscheinenden Teil II behandelt werden.

Summary

In the present (first) part the two possible four-pole equivalent circuits are developed for the simple electroacoustic transducers (electrostatic, electromagnetic, and electrodynamic transducers) utilising in each case two particularly simple electro-mechanical coupling networks. Their practical applications are compared. Magnetostrictive and piezo-electric transducers will be discussed in the second part to be published later.

Sommaire

On établit dans cette première partie les deux quadripôles possibles équivalents aux transformateurs de mesure électroacoustiques simples (transformateurs électrostatiques, électromagnétiques et électrodynamiques); on utilise à cet effet pour chacun d'eux deux quadripôles électromécaniques de couplage particulièrement simples. Ces deux schémas sont ensuite comparés entre eux du point de vue de leur application pratique. Les transformateurs de mesure à magnétostriction et les transformateurs piézoélectriques feront l'objet de la deuxième partie, qui sera publiée ultérieurement.

Einleitung

Die elektromechanischen Vierpolgleichungen für die einfachen elektroakustischen Wandler (elektrostatische, elektromagnetische und elektrodynamische Wandler) lassen sich aus den physikalischen Beziehungen leicht ableiten [1], [2]. Das ist eine Form der Darstellung, die, wenn sie richtig ist, bei allen Autoren übereinstimmt. Außerdem kann man zu diesen Vierpolgleichungen auch noch Ersatzschaltbilder zeichnen. Davon gibt es mehrere, bei denen die Identität nicht ohne weiteres zu ersehen ist [3]–[6]. Man ist zweckmäßig bestrebt, auf der mechanischen Seite ein Ersatzschaltbild des mechanischen Systems und auf der elektrischen Seite die elektrischen Schaltelemente entsprechend den physikalischen Verhältnissen zu zeichnen. In der Mitte muß irgend ein Vierpol eingeschaltet werden, der die Verkopplung der elektrischen und mechanischen Größen übernimmt. Es zeigt sich nun, daß es bei einigen Wandlerarten zwei Möglichkeiten in der

Wahl dieses Verkopplungsvierpols gibt. Die Art der Anschaltung des elektrischen Energieträgers ist bei diesen beiden Möglichkeiten verschieden und von großer Bedeutung.

Solche elektromechanischen Vierpole kann man natürlich auch wieder mit anderen rein mechanischen oder elektromechanischen zusammenschalten. Für die dabei auftretenden Verhältnisse und Begriffe gibt es im elektrischen Fall schon eine sehr weit ausgebaute Theorie, die elektrische Vierpoltheorie. Um sie benutzen zu können, ist es zweckmäßig, sich mit den Bezeichnungen und speziell den Vorzeichenregeln so eng wie möglich an diese Theorie, d. h. an die Bezeichnungen von FELDTKELLER anzuschließen. Dabei tritt aber eine prinzipielle Schwierigkeit auf. Im elektrischen Fall ist eine Eingangsgröße ganz eindeutig einer Ausgangsgröße zuzuordnen und man erhält somit bestimmte Regeln für die Stellung der Variablen in den Vierpolgleichungen. Sind im Eingang elektrische Größen und im Ausgang mechanische Größen

vorhanden, so muß erst entschieden werden, welche elektrische Größe welcher mechanischen Größe zugeordnet, d. h. mit ihr in Analogie gebracht werden soll. Man muß sich also für eine bestimmte elektromechanische Analogie entscheiden. Von REICHARDT [1] wurde gezeigt, daß für konzentrierte Massen und Federn bei festen Körpern die Analogie II nach [1] Spannung \rightarrow Schnelle; Strom \rightarrow Kraft die zweckmäßigere ist. Sie wird im folgenden durchweg verwendet. Daraus ergeben sich dann sofort die Vorzeichenregeln für die mechanische Seite, wenn man sich auf der elektrischen Seite der Zählweise von FELDTEKELLER [7] anschließt (Abb. 1).

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1m} e^{j\varphi_{u_1}} \quad \text{und} \quad u_2 = u_{2m} e^{j\varphi_{u_2}} \\ \text{bzw.} \quad i_1 &= i_{1m} e^{j\varphi_{i_1}} \quad \text{und} \quad i_2 = i_{2m} e^{j\varphi_{i_2}} \end{aligned}$$

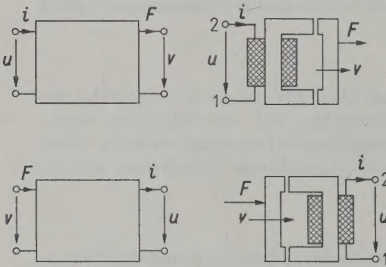


Abb. 1. Zählweise der Vierpolgrößen bei elektromechanischen Vierpolen.

F ist bei Einspeisung auf der mechanischen Seite die auf das System wirkende Kraft und bei Einspeisung auf der elektrischen Seite die vom System auf das angeschlossene Medium wirkende Kraft. Die Schnelle hat von einem festen Standpunkt in beiden Fällen die gleiche Richtung. Die Bezeichnung ist wie in der elektrischen Vierpoltheorie so, daß eine Kettenschaltung ohne Vorzeichenumkehr möglich ist.

Im folgenden werden die Wandler als Sender behandelt. Die Matrix des Empfängers erhält man mit den vereinbarten Vorzeichen aus der Sendermatrix wie folgt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_s \\ i_s \end{pmatrix} &= A_s \cdot \begin{pmatrix} v_s \\ F_s \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_s \\ F_s \end{pmatrix} &= A_s^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta A_s} \begin{vmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_s \\ i_s \end{pmatrix}, \\ u_s &= u_e, \quad i_s = -i_e, \quad v_s = -v_e, \quad F_s = F_e, \\ \begin{pmatrix} v_e \\ F_e \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta A_s} \begin{vmatrix} -A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{11} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_e \\ i_e \end{pmatrix}, \\ A_e &= \frac{1}{\Delta A_s} \begin{vmatrix} -A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{11} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1. Elektrostatischer Wandler

Betrachtet man kleine Abweichungen um einen Arbeitspunkt und führt komplexe Größen ein, so ergeben sich zwei Gleichungen für die vier Größen (vgl. Abb. 2)

$$\begin{aligned} \text{Spannung} \quad u &= u_m e^{j\varphi_u}, \\ \text{Strom} \quad i &= i_m e^{j\varphi_i}, \\ \text{Schnelle} \quad v &= v_m e^{j\varphi_v} \end{aligned}$$

und die elektrisch auf das System ausgeübte Kraft

$$\begin{aligned} F_{el} &= F_{elm} e^{j\varphi_F} \\ (\text{vgl. [4]}): \quad F_{el} &= \frac{1}{Y} u + \frac{1}{Y^2} \frac{1}{j\omega C} v, \end{aligned} \quad (1)$$

$$i = j\omega C u + \frac{1}{Y} v, \quad (2)$$

$$\text{wobei} \quad Y = -s / u \cdot C \quad (3)$$

mit u der Polarisationsspannung, s dem Elektrodenabstand und C der Kapazität des festgebremsten Wandlers.

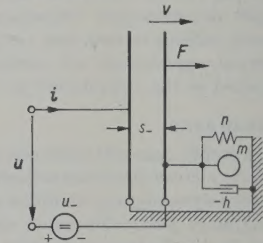


Abb. 2. Elektrostatischer Wandler².

F_{el} teilt sich auf in eine Teilkraft F_s , die auf das mechanische System wirkt, und eine andere Kraft F , die auf das angeschlossene Medium wirkt (vgl. Abb. 3):

$$F_{el} = \frac{v}{h_s} + F. \quad (4)$$

Der mechanische Mitgang des Systems ist

$$h_s = v / F_s.$$

Damit ergeben sich schließlich die Vierpolgleichungen in Kettenform:

$$u = \left(\frac{Y}{h_s} - \frac{1}{j\omega C Y} \right) v + Y F, \quad (5)$$

$$i = j\omega C \frac{Y}{h_s} v + j\omega C Y F. \quad (6)$$

Um zu einem Ersatzschaltbild zu kommen, kann man zunächst auf der mechanischen Seite den

¹ Der Index „Strich“ kennzeichnet den Ruhewert.

² Der Strich links oben am Reibungselement h bedeutet, daß der Mitgang hier rein reell ist.

durch Gl. (4) eingeführten Mitgang h_s des Systems abspalten und erhält das Ersatzschaltbild der Abb. 3 rechts.

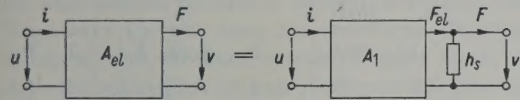


Abb. 3. Abspaltung des Mitganges h_s des Systems.

Dann kann man zwei Annahmen über die Anschaltung des elektrischen Energieträgers, in diesem Fall der Kapazität, treffen, und zwar Reihenschaltung oder Parallelschaltung zum Eingang. Beides ist möglich. Im ersten Fall ergibt sich das Ersatzschaltbild der Abb. 4 mit

$$A_{el} = \begin{vmatrix} \frac{Y}{h_s} - \frac{1}{j\omega C_- Y} & Y \\ j\omega C_- \frac{Y}{h_s} & j\omega C_- Y \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C_-} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} j\omega C_- \frac{1}{Y} & 0 \\ 0 & j\omega C_- Y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h_s} & 1 \end{vmatrix}$$

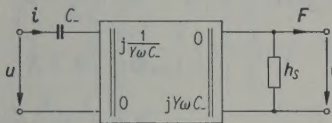


Abb. 4. Ersatzschaltbild des elektrostatischen Wandlers mit „imaginärem Transformator“.

Der in der Mitte befindliche Vierpol hat die Bedeutung eines elektromechanischen Transformators mit imaginärem Übersetzungsverhältnis.

Im zweiten Fall der Parallelschaltung der Kapazität ergibt sich das Ersatzschaltbild der Abb. 5 mit

$$A_{el} = \begin{vmatrix} \frac{Y}{h_s} - \frac{1}{j\omega C_- Y} & Y \\ j\omega C_- \frac{Y}{h_s} & j\omega C_- Y \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_- & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & j\omega L_C \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & Y \\ \frac{1}{Y} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h_s} & 1 \end{vmatrix}$$

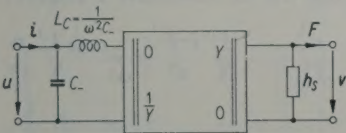


Abb. 5. Ersatzschaltbild des elektrostatischen Wandlers mit frequenzunabhängigem Gyrator.

Der elektromechanische Kopplungsvierpol in diesem Ersatzschaltbild ist ein elektromechanischer Gyrator. Ein elektrischer Gyrator hat die Eigenschaft, einen sekundärseitig angeschlossenen Widerstand mit der Dualitätsinvariante Y in den dualen Leitwert zu transformieren. Hier wird also aus einem Mitgang ein Leitwert und außerdem vertauschen sich Parallel- und Reihenschaltung.

Das Ersatzschaltbild der Abb. 5 hat den Vorteil, daß die mechanischen Schaltelemente frequenzunabhängig in den elektrischen Teil übersetzt werden und außerdem die Wirkung einer Schaltkapazität leicht übersehen werden kann.

Die frequenzabhängige Induktivität L_C stört fast nicht, da sie in jedem Fall, sogar in der Resonanz, gegenüber den übrigen Schaltelementen vernachlässigt werden kann. Unterhalb der Resonanzfrequenz ist vom mechanischen Mitgang h_s im wesentlichen nur die Federung der Membran wirksam. Die auf die elektrische Seite transformierte Nachgiebigkeit n erscheint als Kapazität $C_n = n/Y^2$ (Abb. 6): n = Nachgiebigkeit der Membran = Ausschlag/Kraft = ξ/F

$$C_n = -\frac{u_- C_-}{s_-} \frac{n}{Y} = -u_- C_- \frac{1}{Y} \frac{n}{s_-} \quad (7)$$

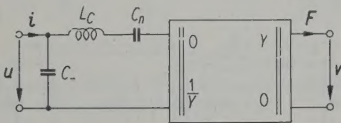


Abb. 6. Transformation des Mitganges h_s für tiefe Frequenzen auf die elektrische Seite.

$s_-/n = F_0$ ist die Kraft, die nötig wäre, um eine Membrandurchbiegung um den Abstand s_- hervorzurufen und $Y s_-/n = u_0$ ist die dazugehörige Spannung und u_- die Polarisierungsspannung, dann folgt:

$$C_n = C_- \frac{u_-}{u_0} \quad (8)$$

Da die Polarisierungsspannung Auslenkungen hervorruft, die in jedem Fall klein gegen den Elektrodenabstand sind, folgt, daß $C_n \ll C_-$ ist. Bei einem ausgeführten Mikrophon wurde $C_n = \frac{1}{23} C_-$ gemessen [8]. Dementsprechend ist auch der Widerstand $R_L = j\omega L_C = j/\omega C_-$ gegenüber $R_n = 1/j\omega C_n$ zu vernachlässigen. Man sieht auch daraus, daß in der Resonanz L_C nur eine geringfügig verstimmende Wirkung hat, ohne an dem Verhalten des Systems wesentliches zu ändern. Aus diesem Grunde ist für die üblichen elektrostatischen Wandler die Vernachlässigung von L_C ohne weiteres berechtigt, so daß sich schließlich als gute Näherung das Ersatzschaltbild der Abb. 7 ergibt.

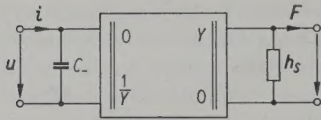


Abb. 7. Angenähertes Ersatzschaltbild des elektrostatischen Wandlers.

2. Elektromagnetischer Wandler

Beim elektromagnetischen Wandler werden der durch den ohmschen Spulenwiderstand und die Streuinduktivität hervorgerufene Spannungsabfall und der durch die Eisenverluste hervorgerufene Teilstrom von der Behandlung des Wandlers getrennt und nicht berücksichtigt. Es wird also nur der Vierpol mit der Kettenmatrix A_m betrachtet (Abb. 8 und 9). Dann er-

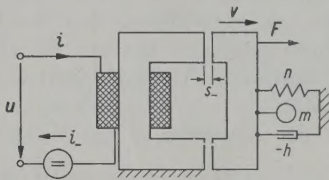


Abb. 8. Elektromagnetischer Wandler mit zwei Luftspalten.

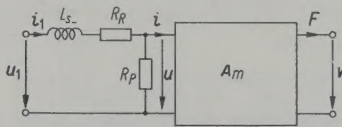


Abb. 9. Trennung der Verluste des leerlaufenden Wandlers vom elektromechanischen Umwandlungsvorgang.

geben sich ganz analog zu Gl. (1) zwei Gleichungen zwischen u , i , F und v :

$$u = j\omega L_- \frac{X}{h_s} v + j\omega L_- X F, \quad (9)$$

$$i = \left(\frac{X}{h_s} - \frac{1}{j\omega L_- X} \right) v + X F \quad (10)$$

wobei

$$X = -\frac{s^*}{i L_-}, \quad s^* = s_- + l_{Fe} \frac{\mu_0}{\mu_{Fe}} \quad (11), (12)$$

bzw.

$$X = -\frac{2s^*}{i L_-}, \quad (11a)$$

wenn zwei Luftspalte vorhanden sind. Dabei ist i_- der Polarisationsstrom, s_- der Luftspalt und L_- die Induktivität des festgebremsten Wandlers. Aus diesen Vierpolgleichungen ergibt sich, wie in Abschnitt 1, bei der Annahme von Parallelschaltung der Induktivität zum Eingang das Ersatzschaltbild der Abb. 10, mit

$$A_m = \begin{vmatrix} j\omega L_- \frac{X}{h_s} & j\omega L_- X \\ \frac{X}{h_s} - \frac{1}{j\omega L_- X} & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{j\omega L_-} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & j\omega L_- X \\ j\frac{1}{\omega L_- X} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h_s} & 1 \end{vmatrix},$$

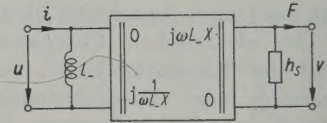


Abb. 10. Ersatzschaltbild des elektromagnetischen Wandlers mit „imaginärem Gyrator“.

bzw. bei der Annahme von Reihenschaltung der Induktivität zum Eingang das Ersatzschaltbild der Abb. 11 mit

$$A_m = \begin{vmatrix} j\omega L_- \frac{X}{h_s} & j\omega L_- X \\ \frac{X}{h_s} - \frac{1}{j\omega L_- X} & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & j\omega L_- \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_L & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{X} & 0 \\ 0 & X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h_s} & 1 \end{vmatrix}.$$

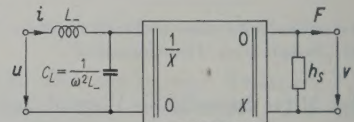


Abb. 11. Ersatzschaltbild des elektromagnetischen Wandlers mit frequenzunabhängigem Transformator.

Es gilt hier genau das gleiche wie im Falle des elektrostatischen Wandlers. Das Ersatzschaltbild mit dem „imaginären Gyrator“ hat hier ebenfalls den Nachteil, daß der mechanische Mitgang frequenzabhängig in den elektrischen Teil übersetzt wird.

Im Ersatzschaltbild Abb. 11 kann die Kapazität C_L gleichfalls gegen den transformierten parallelliegenden mechanischen Mitgang vernachlässigt werden, wie man aus einer ähnlichen Überlegung wie in Abschnitt 1 folgert:

$$L_n = \frac{n}{X^2} = -\frac{1}{X} \frac{i_- L_-}{s^*} n = -\frac{1}{X} \frac{n}{s^*} L_- i_- = -L_- \frac{i_-}{i_0}. \quad (13)$$

$i_0 = X s^* / n$ ist wieder der Strom, der eine Durch-

biegung um die Größe s^* hervorriefe, woraus dann $L_n \ll L$ folgt. In der Umgebung der Resonanz, in der die elektromagnetischen Wandler im allgemeinen betrieben werden, ruft dann die Kapazität C_L nur eine unwesentliche Verstimmung hervor, die man vernachlässigen kann, so daß sich schließlich als *gute Näherung* das Ersatzschaltbild der Abb. 12 ergibt.

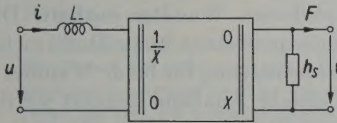


Abb. 12. Angenähertes Ersatzschaltbild des elektromagnetischen Wandlers.

Der elektromagnetische Wandler ist bei der hier gewählten Analogie umkehrbar, da sowohl der elektromechanische Transformator als auch der imaginäre Gyrator umkehrbar sind ($\Delta A_m = +1$).

3. Elektrodynamischer Wandler

Wenn man den Strom in der Richtung positiv zählt, in der er eine positive Kraft hervorruft, so gelten folgende Vierpolgleichungen (Abb. 13):

$$u = \left(\frac{1}{X} + \frac{j\omega L \cdot X}{h_s} \right) v + j\omega L \cdot X F, \tag{14}$$

$$i = \frac{X}{h_s} v + X F \tag{15}$$

mit $X = 1/Bl$;
 $l \triangleq$ Länge des Wicklungsdrahtes,
 $B \triangleq$ magnetische Induktion.

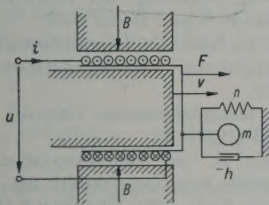


Abb. 13. Elektrodynamischer Wandler.

In diesen Vierpolgleichungen gibt es wieder zwei mögliche Ersatzschaltbilder je nachdem, welche Schaltung man für die Induktivität annimmt.

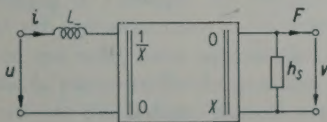


Abb. 14. Ersatzschaltbild des elektrodynamischen Wandlers mit frequenzunabhängigem Transformator.

Bei Reihenschaltung ergibt sich (Abb. 14):

$$A_{el\ dyn} = \begin{vmatrix} \frac{1}{X} + \frac{j\omega L \cdot X}{h_s} & j\omega L \cdot X \\ \frac{X}{h_s} & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{X} & 0 \\ 0 & X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h_s} & 1 \end{vmatrix}$$

Nimmt man eine Parallelschaltung an, so folgt (Abb. 15):

$$A_{el\ dyn} = \begin{vmatrix} \frac{1}{X} + \frac{j\omega L \cdot X}{h_s} & j\omega L \cdot X \\ \frac{X}{h_s} & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{j\omega L} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C_L} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & j\omega L \cdot X \\ j\frac{1}{\omega L \cdot X} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h_s} & 1 \end{vmatrix}$$

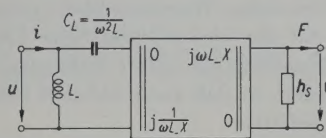


Abb. 15. Ersatzschaltbild des elektrodynamischen Wandlers mit „imaginärem Gyrator“.

Hier fällt die Entscheidung eindeutig zugunsten des Ersatzschaltbildes mit der Reihenschaltung der Induktivität aus.

Dieses Ersatzschaltbild wird auch allein zur Beschreibung des elektrodynamischen Wandlers verwendet. Die Existenz der zweiten Möglichkeit ist jedoch im Vergleich zum elektromagnetischen Wandler von Interesse.

Vergleicht man die Ersatzschaltbilder des elektromagnetischen und elektrodynamischen Wandlers (Abb. 11 und 14), die den elektromechanischen Transformator enthalten, so zeigt sich, daß sie sich nur durch die zusätzlich vorhandene Kapazität C_L beim elektromagnetischen Wandler unterscheiden. Transformiert man C_L auf die mechanische Seite, so wird der elektrodynamische Wandler identisch mit einem elektromagnetischen, dem eine Nachgiebigkeit $n_{el} = -X^2 L$ parallelgeschaltet ist [4].

4. Tangentiale Wandler

Wie F. A. FISCHER [3] gezeigt hat, gibt es auch elektrostatische Wandler, bei denen die fre-

quenzabhängige Induktivität in der Darstellung mit dem frequenzunabhängigen Gyrator fehlt. Das sind solche Wandler, die die Kräfte an tangential zum Feld verlaufenden Grenzsichten ausnutzen. Es zeigt sich, daß bei diesen Wandlern die Induktivität L_C fehlt. Die Ursache dafür ist, daß bei ihnen in dem Zusammenhang zwischen Kraft und Spannung die Schnelle nicht auftritt, was bei den üblichen elektrostatischen Wandlern der Fall ist. Natürlich kann man ein solches Gebilde auch im magnetischen Fall konstruieren.

5. Schlußfolgerungen

Es zeigt sich, daß es für jeden Wandler ein Ersatzschaltbild gibt, in dem die Verkopplung zwischen elektrischen und mechanischen Größen durch einen Transformator bzw. Gyrator mit frequenzunabhängigem Übersetzungsverhältnis ausgedrückt werden kann.

Der große Vorteil dieser Darstellungsweise besteht darin, daß die Transformation der mechanischen Schaltelemente auf die elektrische Seite und umgekehrt frequenzunabhängig erfolgt. Die etwa auftretenden frequenzabhängigen Schaltelemente auf der elektrischen Seite können bei üblichen Wandlern mit guter Näherung vernachlässigt werden, so daß auch dadurch keine Komplikation auftritt.

Es zeigt sich ferner, daß bei Benutzung dieser frequenzunabhängigen Kopplungsvierpole alle elektrischen Wandler einen elektromechanischen Gyrator und alle magnetischen Wandler einen elektromechanischen Transformator enthalten. Die elektrischen Wandler sind also nichtumkehrbar, da der in der Kettenschaltung enthaltene Gyrator nichtumkehrbar ist ($\Delta A_{el} = -1$). Die magnetischen Wandler hingegen sind umkehrbar. Das gilt jedoch nur bei Verwendung der Analogie II, nach [1]. Verwendet man Analogie I (Spannung \rightarrow Kraft; Strom \rightarrow Schnelle), so vertauschen sich diese Zuordnungen. Es hat also nur dann einen Sinn, von Umkehrbarkeit bzw. Nichtumkehrbarkeit zu sprechen, wenn man gleichzeitig die verwendete elektromechanische Analogie angibt.

Diese Überlegungen haben Bedeutung bei der Kettenschaltung von Wandlern. Schaltet man

zwei Wandler mit den beiden elektrischen oder auch mit den beiden mechanischen Klemmen zusammen, so erhält man einen rein mechanischen bzw. elektrischen Vierpol. Beachtet man weiterhin, daß die Kettendeterminante der beiden zusammengeschalteten Vierpole gleich dem Produkt der Kettendeterminanten der Einzelvierpole ist, so folgt daraus, daß eine Kettenschaltung von Wandlern nichtumkehrbar ist, die einen nichtumkehrbaren Wandler enthält. Die Wahl der Analogie spielt dann keine Rolle mehr, da bei einer Kettenschaltung für beide Wandler zwangsläufig die gleiche Analogie benutzt werden muß.

Der physikalische Sinn dieser Aussagen ist, daß es zwei Wandlergruppen gibt, die die Eigenschaft besitzen, daß eine Kettenschaltung von Wandlern aus der gleichen Gruppe einen umkehrbaren Vierpol und eine Kettenschaltung von zwei Wandlern aus verschiedenen Gruppen einen nichtumkehrbaren Vierpol ergibt. Zu der einen Gruppe gehören alle magnetischen und zu der anderen alle elektrischen Wandler.

Eine allgemeine Systematik, die in einigen Fällen von der bisher aufgestellten [2] abweicht, soll im Anschluß an die spätere Behandlung der piezoelektrischen und magnetostriktiven Wandler betrachtet werden.

(Eingegangen am 26. Juni 1954.)

Schrifttum

- [1] REICHARDT, W., Einführung in die Grundlagen der Elektroakustik, 2. Aufl. Akad. Verlagsges., Leipzig 1954.
- [2] FISCHER, F. A., Herleitung der Kraftgesetze für sämtliche magnetischen und sämtliche elektrischen Schallwandler aus je einem allgemeinen Gesetz. *Acustica* **3** [1953], 441.
- [3] FISCHER, F. A., Grundzüge der Elektroakustik. Fachverlag Schiele & Schön, Berlin 1950.
- [4] FISCHER, F. A., Über die verschiedenen Darstellungen der elektroakustischen Wandler. *Arch. elekt. Übertrag.* **7** [1953], 569.
- [5] BRAUN, K., Elektroakustische Vierpole. *Telegr. Fernspr. Tech.* **33** [1944], 85.
- [6] FELDTKELLER, R. und NONNENMACHER, W., Einheitliche elektrische Ersatzschaltbilder für elektroakustische Wandler. *Arch. elekt. Übertrag.* **8** [1954], 191.
- [7] FELDTKELLER, R., Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, 5. Aufl. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1948.
- [8] HECHT, H., Elektroakustische Wandler. Verlag J. A. Barth, Leipzig 1951.

TUYAUX ET RÉSONATEURS

CALCUL ET MESURE DE QUELQUES RÉSISTANCES ACOUSTIQUES

par J. GUITTARD

Laboratoire de l'Institut Catholique de Toulouse

Sommaire

Des calculs de résistances acoustiques sont possibles dans plusieurs cas, moyennant certaines hypothèses. On recherche pour cela des expressions du potentiel des vitesses. Les résultats expérimentaux concordent avec les valeurs trouvées, au moins pour les fréquences assez basses utilisées (100...500 Hz). La précision obtenue n'est jamais très grande. La cause principale en est l'imperfection des théories classiques sur les mouvements vibratoires, qui ne tiennent pas compte, en particulier, des circulations non périodiques, ni de la viscosité de l'air.

Zusammenfassung

Unter gewissen Voraussetzungen ist die Berechnung der „Leitfähigkeit“ von Öffnungen in verschiedenen Fällen möglich. Dazu werden Formeln für das Schnellepotential angegeben. Die theoretischen Ergebnisse stimmen mit den experimentellen, zumindest für die benutzten ziemlich tiefen Frequenzen (100...500 Hz), gut überein. Wegen der Unvollkommenheiten der klassischen Theorien der Schwingungen, die insbesondere weder nichtlineare Effekte noch die Zähigkeit der Luft berücksichtigen, ist die erzielte Genauigkeit nicht sehr groß.

Summary

Calculations of the conductivity of holes, slits, etc. can be made under certain hypotheses in many cases. Expressions for the velocity potentials are necessary. Experimental results agree with theory, at any rate at the low frequencies used (100...500 c/s) but the precision is not great. The principal reason for this is to be found in the imperfections of classical theories on vibratory motions, which do not, in particular, take account of acoustic streaming or of the viscosity of the air.

La détermination de la fréquence propre d'un résonateur, la correction au bout ouvert d'un tuyau sonore, une modification de section, un tuyau partiellement bouché, sont autant de cas faisant intervenir la notion d'impédance acoustique, que l'on définit comme le rapport entre la pression et la vitesse.

Pour un piston plat, que l'on suppose rayonner dans un milieu semi-infini, elle a pour expression, lorsque ka est petit [1]:

$$s = \rho c \left(\frac{k^2 a^2}{2} + i \frac{8ka}{3\pi} \right)$$

ρ = la masse spécifique du milieu,

c = la vitesse de propagation dans le milieu,

$k = 2\pi/\lambda$,

a = le rayon du piston,

$i = \sqrt{-1}$.

Le premier terme est une résistance pure, correspondant à l'énergie de rayonnement; le deuxième est une réactance ou inertance.

Dans ce qui suit, nous appellerons résistance acoustique la partie réelle du quotient du potentiel des vitesses par le flux; dans le cas ci-dessus, ce serait $8/3\pi^2 a$; c'est une réactance, homogène à l'inverse d'une longueur.

Dans une première partie, nous calculerons ces résistances pour différents cas. Une deuxième partie sera consacrée à comparer les résultats à l'expérience.

I.

CALCULS DE RÉSISTANCES

Nous supposons que les dimensions de l'espace acoustique envisagé sont petites devant le quart de la longueur d'onde du son utilisé. Dans ce cas, en effet, nous pourrions assimiler l'air à un fluide incompressible dont on étudie les conditions d'écoulement. Négligeant dans le potentiel des vitesses le facteur dépendant du temps, la partie restante devra satisfaire à l'équation de Laplace:

$$\Delta \phi = 0.$$

La fréquence utilisée dans les différentes expériences, souvent voisine de 100 Hz, peut aller jusqu'à 300 Hz. Dans ce dernier cas, le quart de longueur d'onde vaut 28 cm environ. Pour que la condition soit satisfaite, il ne faudra pas dépasser quelques centimètres.

Nous nous occuperons d'abord du cas à deux dimensions, l'équation de Laplace ayant la forme:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Nous passerons ensuite au phénomène dans l'espace. Les différents problèmes présentant une symétrie de révolution, avec les coordonnées cylindriques r et z , l'équation de Laplace prendra la forme:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

1. Ouverture circulaire en paroi mince

Le diamètre de l'ouverture est $2R$.

Problème à deux dimensions

Le problème analogue est celui d'une fente de largeur $2R$.

Partant du plan de la variable complexe $z(xoy)$ et du potentiel complexe Rz , nous utiliserons une représentation conforme amenant au plan de la variable $Z(XOY)$ et transformant les lignes de courant ($y = \text{constante}$) d'une manière convenable pour le problème étudié.

Soit cette représentation conforme définie par

$$Z = R \operatorname{ch} z. \quad (Z = X + iY, \quad z = x + iy)$$

Les formules de transformation sont:

$$X = R \operatorname{ch} x \cos y,$$

$$Y = R \operatorname{sh} x \sin y.$$

Avec le potentiel complexe

$$\Phi = Rz = R \arg \operatorname{ch} (Z/R),$$

les lignes de courant sont définies par $y = \text{constante}$. Ce sont les hyperboles

$$\frac{X^2}{\cos^2 y} - \frac{Y^2}{\sin^2 y} = R^2.$$

La ligne de courant $y = 0$ (abc) donne le contour $a'b'c'$, avec $Ob' = R$. De même, la ligne de courant $y = \pi$ (def) donne $d'e'f'$ avec $Oe' = R$ (Fig. 1).

Dans ces conditions, cherchons les valeurs de la vitesse sur l'axe OY. Si u et v sont les composantes de cette vitesse, on a:

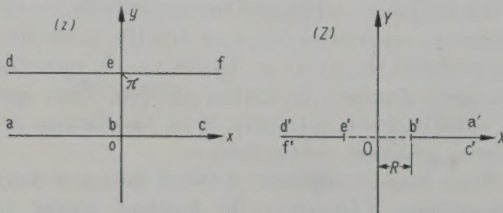


Fig. 1. Correspondance $Z = R \operatorname{ch} z$.

$$u - iv = \frac{d\Phi}{dZ} = \frac{d\Phi}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\operatorname{sh} z}.$$

L'axe OY étant obtenu pour $y = \pi/2$, on aura:

$$u - iv = \frac{1}{\operatorname{sh}(x + i\pi/2)} = -i \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

d'où:

$$u = 0 \quad \text{et} \quad v = 1/\operatorname{ch} x.$$

On obtient ainsi la courbe A de la Fig. 2.

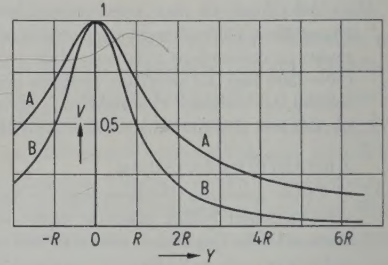


Fig. 2. Trou en paroi mince, vitesses sur l'axe;
A phénomène plan,
B phénomène dans l'espace.

Phénomène de révolution.

Soit un trou circulaire de rayon R dans une paroi mince. L'axe de révolution est l'axe du cercle. Il n'est pas question de représentation conforme dans l'espace; mais, en se servant du problème analogue à deux dimensions précédent, ($X = r$ et $Y = z$), r et z étant deux des coordonnées cylindriques de l'espace¹, le changement de variables X, Y en x, y pourra faciliter la résolution du problème. Il faut trouver un potentiel réel Φ pour les vitesses, conservant les lignes de courant particulières déjà trouvées ($y = 0$ et $y = \pi$), donc fonction de x seul et satisfaisant à l'équation de Laplace:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Puisque Φ ne doit dépendre que de x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \Phi' \frac{\partial x}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \Phi'' \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \Phi' \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

de même:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Phi'' \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \Phi' \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}.$$

En remplaçant dans l'équation, il vient:

$$\frac{1}{r} \Phi' \frac{\partial x}{\partial r} + \Phi'' \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right] + \Phi' \left(\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) = 0.$$

¹ Ne pas confondre la coordonnée z avec la variable complexe z du paragraphe précédent.

Le dernier terme est nul, puisque x est une fonction harmonique de r et z (X et Y). D'autre part, les formules de transformation donnent:

$$\begin{aligned} dr &= R(\operatorname{sh} x \cos y \, dx - \operatorname{ch} x \sin y \, dy), \\ dz &= R(\operatorname{ch} x \sin y \, dx + \operatorname{sh} x \cos y \, dy) \end{aligned}$$

d'où l'on tire:

$$dx = \frac{\operatorname{sh} x \cos y \, dr + \operatorname{ch} x \sin y \, dz}{R(\operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y)},$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\operatorname{sh} x \cos y}{R(\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y)}$$

et

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\operatorname{ch} x \sin y}{R(\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y)}.$$

L'équation de Laplace devient après simplifications:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \Phi' + \Phi'' = 0,$$

d'où, en intégrant:

$$\Phi' = a/\operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad \Phi = 2a \operatorname{arctg} e^x + b,$$

a et b étant des constantes d'intégration.

Lorsque x est très grand, le potentiel doit tendre vers zéro, puisqu'on se trouve loin de l'ouverture: $\pi a + b = 0$.

$$\Phi = 2a(\operatorname{arctg} e^x - \pi/2) = -2a \operatorname{arctg} e^{-x}.$$

Pour avoir une vitesse égale à l'unité sur le trou ($x = 0$), nous prendrons $a = R$.

Sur l'axe de révolution ($y = \pi/2$), nous aurons

$$V_r = \partial\Phi/\partial r = 0 \quad \text{et} \quad V_z = \partial\Phi/\partial z = 1/\operatorname{ch}^2 x.$$

Cette dernière expression est le carré de celle trouvée dans le problème à deux dimensions. La courbe B de la Fig. 2 est donc facile à construire.

Nous évaluerons la résistance du trou en écrivant qu'elle est égale à la différence de potentiel divisée par le débit. Celui-ci étant le même sur toute surface équipotentielle, nous pouvons prendre pour cette dernière une demi-sphère de rayon suffisamment grand. Sur toute cette surface, on a:

$$\partial\Phi/\partial n = (\partial\Phi/\partial z)_{r=0} = 1/\operatorname{ch}^2 x,$$

d'où le débit $2\pi R^2 \operatorname{sh}^2 x / \operatorname{ch}^2 x = 2\pi R^2$, puisque x est très grand.

Pour un côté du trou, la résistance sera ainsi:

$$\varrho = 2R \frac{\operatorname{arctg} 1}{2\pi R^2} = \frac{1}{4R}$$

puisque sur le trou $x = 0$.

Enfin, pour les deux côtés:

$$\varrho = 1/2R$$

résultat connu [2].

2. Tuyau indéfini, de rayon R , débouchant dans un milieu semi-infini

Problème à deux dimensions

Cherchons une représentation conforme qui transforme l'axe réel en le contour ABC DEF (Fig. 3). Nous prendrons:

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{2R}{\pi} \frac{\sqrt{z^2-1}}{z}, \quad Z = \frac{2R}{\pi} \int \frac{\sqrt{z^2-1}}{z} dz$$

qui donne après intégration:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2R}{\pi} \left(\sqrt{z^2-1} + i \log \frac{1+i\sqrt{z^2-1}}{z} \right) + \\ &\quad + \text{constante} \end{aligned} \quad (1)$$

qui s'écrit encore:

$$Z = -\frac{2R}{\pi} (\sqrt{z^2-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{z^2-1}) + \text{constante}. \quad (2)$$

Cherchons ce que devient l'axe réel pour une constante nulle. Partons de x très grand et positif; Z est alors réel, infini et positif, d'après (2). Lorsque $x = 1$, $Z = 0$. A partir de cette valeur, le radical doit s'écrire $i/\sqrt{1-z^2}$. D'après (1), la partie réelle de Z reste nulle, Z est imaginaire pur. Pour $x = 0$, Z devient infini à cause du dénominateur du logarithme.

$z = x$ changeant alors de signe, on doit ajouter au crochet le logarithme de -1 , multiplié par i , soit $-\pi$. La partie réelle de Z est alors égale à $-2R$ et constante. Lorsque $x = -1$, $Z = -2R$. A partir de ce moment, le radical doit s'écrire $-\sqrt{z^2-1}$. Z est alors réel et le reste jusqu'à l'infini négatif qu'il atteint pour x infini et négatif.

Qu'est devenu l'axe imaginaire $z = iy$?

$$Z = \frac{2R}{\pi} \left(i\sqrt{1+y^2} + i \log \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Pour que cette dernière expression soit imaginaire pure et par raison de symétrie, nous prendrons la constante d'intégration égale à R :

$$Z = \frac{2R}{\pi} \left(\sqrt{z^2-1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \right).$$

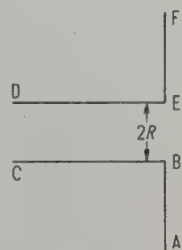


Fig. 3.

Tuyau débouchant dans un milieu semi-infini.

La correspondance entre les plans xoy et XOY est indiquée sur la Fig. 4.

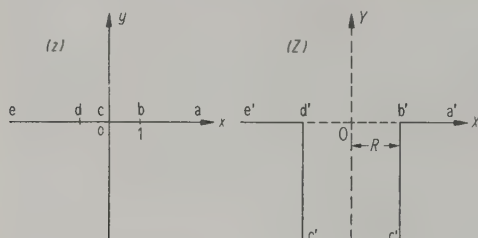


Fig. 4. Correspondance

$$Z = \frac{2R}{\pi} \left(\sqrt{z^2 - 1} + i \log \frac{\sqrt{z^2 - 1} - i}{z} \right).$$

Avec le potentiel complexe $\Phi = (2R/\pi) \log z$, aux lignes de courant $y/x = \text{constante}$ correspondront en particulier $a'b'c'd'e'$ ($y/x = 0$) et l'axe OY (y/x infini). Le potentiel des vitesses φ sera la partie réelle de Φ :

$$\varphi = (R/\pi) \log(x^2 + y^2).$$

Comme dans le cas précédent, on peut calculer les valeurs de la vitesse sur l'axe OY ; on trouve (Fig. 5, courbe A):

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

avec:

$$Y = \frac{2R}{\pi} \left(\sqrt{1 + y^2} + \log \frac{\sqrt{1 + y^2} - 1}{y} \right). \quad (3)$$

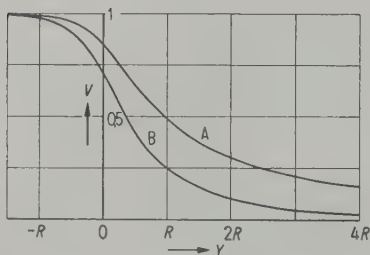


Fig. 5. Tuyau débouchant dans un milieu semi-infini, vitesses sur l'axe:
A phénomène plan, B phénomène dans l'espace.

Phénomène de révolution

On aura ici: $X = r$ et $Y = z$, r et z étant les coordonnées cylindriques de l'espace. Pour conserver les lignes de courant particulières ($y/x = 0$ et y/x infini), il faudrait trouver un potentiel réel des vitesses, fonction de $(x^2 + y^2)$ et satisfaisant à l'équation de Laplace. Le problème n'admet pas de solution algébrique. On sait d'ailleurs [3], que le passage à un phénomène de révolution, à partir du problème à deux dimensions, n'est possible que, lorsque dans la trans-

formation due à la représentation conforme, l'une des nouvelles coordonnées est égale au produit d'une fonction de x par une fonction de y . C'était le cas pour le premier système étudié: trou circulaire en paroi mince. Dans le cas actuel, cette condition n'est pas vérifiée. Les expressions de X et de Y sont d'ailleurs assez compliquées.

Pour $r^2 + z^2$ très grand, c'est-à-dire pour $x^2 + y^2$ très grand, le potentiel doit être de la forme $a/\sqrt{r^2 + z^2}$, les surfaces équipotentielles étant alors des demi-sphères de rayon $\sqrt{r^2 + z^2}$.

Pour $z(Y)$ très grand et négatif, c'est-à-dire assez loin à l'intérieur du tuyau, le potentiel doit être de la forme $-z + b$. En écrivant que le débit est le même à travers deux surfaces équipotentielles très éloignées, on aura:

$$a = R^2/2. \quad (4)$$

La résistance supplémentaire due à l'épanouissement des lignes de courant dans le milieu infini serait ainsi $b/\pi R^2$. Il suffirait de déterminer b pour la connaître. Ce serait possible si l'on avait les valeurs de la vitesse sur l'axe; ces valeurs sont mesurables expérimentalement.

Dans le cas où la recherche d'un potentiel réel ne peut se faire par une méthode algébrique, on peut le calculer numériquement par approximations successives aux sommets d'un quadrillage assez petit, en utilisant les premiers termes du développement en série de Taylor, suivant les variables r et z , et l'équation de Laplace [4].

On pourrait aussi rechercher, pour le potentiel, une solution de la forme:

$$\Phi = \varphi(r) \psi(z).$$

On sait [5] que l'on a dans ces conditions:

$$\Phi = \sum_m [A J_0(mr) + B N_0(mr)] \times \\ \times (A' \operatorname{sh} mz + B' \operatorname{ch} mz),$$

A, B, A', B' , et m étant des constantes à choisir convenablement.

Ces deux méthodes demanderaient certainement un très long travail. Le procédé suivant, quoique arbitraire, permet d'obtenir un résultat convenable.

D'après le premier cas étudié (trou circulaire en paroi mince), on voit que la vitesse diminue très rapidement dans le cas du phénomène dans l'espace que dans le cas du phénomène plan, lorsqu'on s'éloigne de l'ouverture. De façon plus précise, dans l'espace, la vitesse est le carré de la vitesse dans le phénomène plan. Nous poserons donc, ici, pour la vitesse sur l'axe $v = 1/(1 + y^2)$ au lieu de $1/\sqrt{1 + y^2}$. Pour le potentiel sur l'axe, on aura:

$$\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{1}{1+y^2}, \quad \Phi = -\int \frac{dz}{1+y^2}.$$

D'après l'expression de $z(Y)$ en fonction de y donnée par l'équation (3), on aura:

$$dz = \frac{2R}{\pi} \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} dy$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{2R}{\pi} \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} \\ &= \frac{2R}{\pi} \log \frac{\sqrt{1+y^2}+1}{y} + \text{constante.} \end{aligned}$$

Pour y très grand et positif, ce potentiel prend la forme $\frac{2R}{\pi} \frac{1}{y}$, d'autre part, z devient $\frac{2R}{\pi} y$; on a donc:

$$\Phi_1 = \frac{4R^2}{\pi^2} \frac{1}{z};$$

le flux correspondant est $8R^2/\pi$. Pour y très petit, le potentiel s'écrit:

$$\frac{2R}{\pi} (\log 2 - \log y),$$

d'autre part, z devient

$$\frac{2R}{\pi} (1 - \log 2 + \log y); \quad \text{d'où} \quad \Phi_2 = \frac{2R}{\pi} - z;$$

le flux correspondant est πR^2 . Il n'est pas le même que dans le premier cas. Il est possible de modifier légèrement l'expression du potentiel de façon que le flux se conserve, c'est-à-dire que la condition (4) soit satisfaite, en posant:

$$\Phi = \frac{2R}{\pi} \log \frac{\sqrt{1+y^2} + \pi^2/8}{y}.$$

Dans ces conditions, la vitesse sur l'axe sera:

$$v = \frac{d\Phi}{dy} \cdot \frac{dy}{dz} = \frac{1}{1+y^2} \frac{1 + \sqrt{1+y^2} \cdot \pi^2/8}{\sqrt{1+y^2} + \pi^2/8}.$$

La Fig. 5 (courbe B) donne les valeurs de cette vitesse ainsi que celles obtenues dans le cas du phénomène plan.

Les valeurs asymptotiques du potentiel pour y très grand et pour y très petit étant respectivement:

$$\Phi_1 = \frac{2R}{\pi} \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{z}$$

et

$$\Phi_2 = -z + \frac{2R}{\pi} \left[1 - \log 2 + \log \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \right) \right],$$

la résistance supplémentaire sera:

$$\frac{2R}{\pi} \frac{1 - \log 2 + \log(1 + \pi^2/8)}{\pi R^2} = \frac{1}{4,44 R}.$$

Nous avons une résistance légèrement inférieure à celle du côté d'un trou circulaire de même rayon en paroi mince. La correction de longueur qui lui correspondrait, dans le cas d'un tuyau sonore, serait:

$$\alpha = \pi R/4,44 = 0,708 R.$$

3. Tuyau indéfini, de rayon R , débouchant dans un milieu infini

Problème à deux dimensions

Cherchons à obtenir le contour ABCD de la Figure 6. Soit la représentation conforme définie par:

$$Z = \frac{R}{\pi} (z + e^z).$$

Fig. 6. Tuyau débouchant dans un milieu infini.



Les formules de transformation sont:

$$X = \frac{R}{\pi} (x + e^x \cos y), \quad Y = \frac{R}{\pi} (y + e^x \sin y).$$

Prenons le potentiel complexe $\Phi = Rz/\pi$. Les lignes de courant sont définies par $y = \text{constante}$. La ligne $y = 0$ devient $Y = 0$. La ligne $y = \pi/2$ devient une demi-droite parallèle à OX, à la distance R , issue du point $X = -R$; enfin, la ligne $y = -\pi/2$ est symétrique de la précédente par rapport à OX. Par raison de symétrie, nous prendrons:

$$Z = \frac{R}{\pi} (1 + z + e^z),$$

avec:

$$X = \frac{R}{\pi} (1 + x + e^x \cos y), \quad Y = \frac{R}{\pi} (y + e^x \sin y).$$

On obtient la vitesse sur l'axe $Y = 0$ ($y = 0$):

$$u = \frac{1}{1 + e^x} \quad \text{avec} \quad X = \frac{R}{\pi} (1 + x + e^x).$$

La correspondance entre les plans xoy et XOY est indiquée sur la Fig. 7. La courbe représentant les variations de la vitesse sur l'axe, par la courbe A de la Fig. 8.

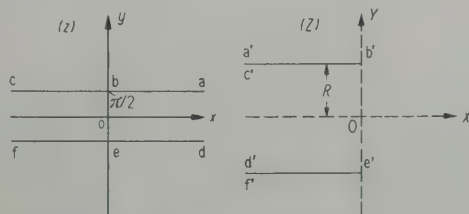


Fig. 7. Correspondance $Z = \frac{R}{\pi} (1 + z + e^z)$.

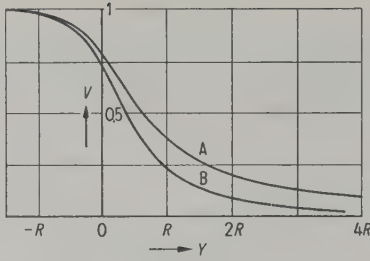


Fig. 8. Tuyau débouchant dans un milieu infini, vitesses sur l'axe;
A phénomène plan, B phénomène dans l'espace.

Problème de révolution

Comme dans le cas précédent, il n'est pas possible de trouver une solution algébrique pour un tuyau de rayon R . Les mêmes considérations que plus haut sont valables. La condition d'égalité de flux (4) devient: $a = R^2$, car les surfaces équipotentielles éloignées sont des sphères entières. On obtient finalement:

$$\Phi = \frac{R}{\pi} \log \frac{e^x + \pi^2/4}{e^x}$$

et la vitesse:

$$u = \frac{\pi^2/4}{(1 + e^x)(\pi^2/4 + e^x)}$$

dont les variations sont représentées par la courbe B de la Fig. 8.

Les valeurs asymptotiques du potentiel sont: pour x très grand et positif (X très grand)

$$\Phi_1 = \frac{R}{\pi} \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{X},$$

et pour x très grand et négatif (X très grand et négatif)

$$\Phi_2 = \frac{R}{\pi} (\log \pi^2/4 + 1) - X.$$

La résistance supplémentaire correspondant à l'épanouissement des lignes de courant dans le milieu infini aura pour valeur:

$$\frac{R}{\pi} \frac{1 + \log \pi^2/4}{\pi R^2} = \frac{1}{5,18 R}.$$

4. Changement de section dans un tuyau cylindrique

Problème à deux dimensions

Cherchons à obtenir le contour ABCDEFGH de la Fig. 9. Pour cela, soit la représentation conforme (transformation de SCHWARZ) définie par

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{2aR}{\pi} \frac{1}{z} \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-a^2}}.$$

$$Z = \frac{2aR}{\pi} \int \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-a^2}} \frac{dz}{z}$$

où a est une constante positive, supérieure à 1. On trouve après intégration:

$$Z = \frac{2aR}{\pi} \left[\log(\sqrt{z^2-1} + \sqrt{z^2-a^2}) + \frac{1}{a} \log \frac{a\sqrt{z^2-1} - \sqrt{z^2-a^2}}{z} \right] + \text{constante}.$$

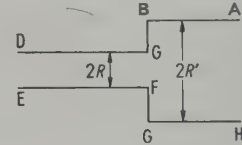


Fig. 9. Changement de section dans un tuyau.

Etudions ce que devient l'axe réel $y = 0$, lorsque la constante d'intégration est nulle. Partons de $z = x$ très grand et positif. Z est alors réel, très grand et positif. Lorsque $x = a$, $Z = (R/\pi)(a+1) \log(a^2-1)$. A partir de ce moment, le deuxième radical s'écrit $i\sqrt{a^2-z^2}$. La partie réelle de Z est alors constante et égale à sa valeur pour $x = a$. Lorsque $x = 1$, la partie imaginaire de Z est $R(a-1)$. A partir de ce moment, le premier radical s'écrit $i\sqrt{1-z^2}$. La partie imaginaire de Z reste égale à sa valeur pour $x = 1$. Lorsque x tend vers zéro, la partie réelle de Z tend vers moins l'infini à cause du dénominateur du deuxième logarithme.

$z = x$ changeant alors de signe, on doit ajouter au second logarithme le logarithme de -1 ; la partie imaginaire devient $R(a+1)$. Lorsque x atteint la valeur -1 , la partie réelle ne change plus; le premier radical s'écrit $-\sqrt{1-z^2}$. Lorsque x atteint la valeur $-a$, c'est la partie imaginaire qui ne change plus; le deuxième radical s'écrit alors: $-\sqrt{z^2-a^2}$.

Par raison de symétrie, nous prendrons une constante d'intégration égale à

$$-\left(1 + \frac{1}{a}\right) \log \sqrt{a^2-1} - i \frac{\pi}{2}.$$

On a alors:

$$Z = \frac{2aR}{\pi} \left[\log(\sqrt{z^2-1} + \sqrt{z^2-a^2}) + \frac{1}{a} \log \frac{a\sqrt{z^2-1} - \sqrt{z^2-a^2}}{z} - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \log \sqrt{a^2-1} - i \frac{\pi}{2} \right].$$

Si l'on prend le potentiel complexe $\Phi = (2aR)/\pi \log z$, les lignes de courant $y/x = \text{constante}$ donneront en particulier: le contour des deux bandes ($y/x = 0$) et l'axe OX (y/x infini). La correspondance entre les deux plans est indiquée sur la Fig. 10.

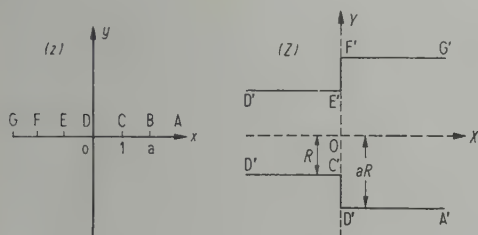


Fig. 10. Correspondance des plans z et Z pour un changement de section dans un tuyau.

Les largeurs des deux bandes sont $2R$ et $2aR$; on posera donc $a = R'/R$.

Cherchons la vitesse sur l'axe $Y = 0$ ($x = 0$). On a:

$$v = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

lorsque $x = 0$,

$$v = \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

D'autre part, on a alors:

$$X = \frac{2aR}{\pi} \left[\log(\sqrt{1+y^2} + \sqrt{a^2+y^2}) + \frac{1}{a} \log \frac{a\sqrt{1+y^2} - \sqrt{a^2+y^2}}{y} + \frac{a+1}{2a} \log(a^2-1) \right]. \quad (5)$$

On obtient ainsi la courbe B de la Fig. 11, construite pour $a = 2$.

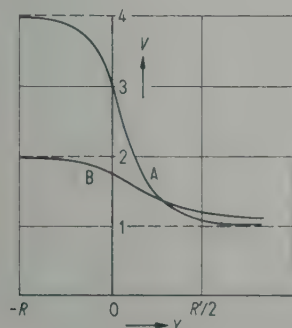


Fig. 11. Changement de section dans un tuyau sonore, vitesses sur l'axe; A phénomène dans l'espace, B phénomène plan.

Phénomène dans l'espace

Comme dans les deux cas précédents, le problème n'admet pas de solution algébrique. On peut procéder de manière analogue en posant, pour la vitesse sur l'axe:

$$v = \frac{a^2 + y^2}{1 + y^2} \quad \text{au lieu de} \quad v = \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Les valeurs extrêmes sont a^2 ($y = 0$) et 1 (y infini). Elles satisfont à la condition de conservation de flux puisque les surfaces des deux branches du tuyau sont dans le rapport $a^2 = R'^2/R^2$. Dans ces conditions, le potentiel réel sur l'axe devra être tel que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{a^2 + y^2}{1 + y^2}.$$

Tenant compte de l'expression (5) de X en fonction de y ,

$$\Phi = \frac{2aR}{\pi} \int \frac{\sqrt{y^2 + a^2}}{\sqrt{y^2 + 1}} \frac{dy}{y}$$

d'où l'on tire

$$\Phi = \frac{2aR}{\pi} \left[\log(\sqrt{a^2 + y^2} - \sqrt{1 + y^2}) + a \log \frac{a\sqrt{1 + y^2} + \sqrt{a^2 + y^2}}{y} + \text{constante} \right].$$

Lorsque y est très grand, le potentiel prend la forme:

$$\Phi_1 = \frac{2aR}{\pi} \left[-\log y + \log \frac{a^2 - 1}{2} + a \log(a + 1) \right].$$

Mais alors:

$$X = \frac{2aR}{\pi} \left[\log y + \log 2 + \frac{1}{a} \log(a - 1) - \frac{a + 1}{2a} \log(a^2 - 1) \right]$$

d'où:

$$\Phi_1 = -X + \frac{2aR}{\pi} \left[\log 2 + \log \frac{a^2 - 1}{2} + \frac{1}{a} \log(a - 1) - \frac{a + 1}{2a} \log(a^2 - 1) + a \log(a + 1) \right].$$

Lorsque y est très petit, le potentiel prend la forme:

$$\Phi_2 = \frac{2aR}{\pi} [-a \log y + \log(a - 1) + a \log 2a].$$

Mais alors:

$$X = \frac{2aR}{\pi} \left[\frac{1}{a} \log y + \log(1 + a) + \frac{1}{a} \log \frac{a^2 - 1}{2a} - \frac{a + 1}{2a} \log(a^2 - 1) \right]$$

d'où:

$$\Phi_2 = -a^2 X + \frac{2aR}{\pi} \left[\log(a-1) + a \log 2a + a^2 \times \right. \\ \left. \times \log(1+a) + a \log \frac{a^2-1}{2a} - \frac{a(a+1)}{2} \log(a^2-1) \right].$$

La courbe A de la Fig. 11 donne les variations de la vitesse sur l'axe.

La résistance supplémentaire due à la modification de section sera obtenue en prenant la différence des potentiels supplémentaires asymptotiques; c'est-à-dire, les termes autres que $-X$ pour Φ_1 et $-a^2 X$ pour Φ_2 . On obtient ainsi:

$$\varrho = \frac{1}{R} \frac{(a+1)(a-1)^2}{\pi^2 a^2} \log \frac{a+1}{a-1}.$$

Pour $a=1$, c'est-à-dire en l'absence de modification de section, $\varrho=0$. Pour a infini, c'est-à-dire pour un tuyau de rayon R débouchant dans un milieu semi-infini:

$$\varrho = \frac{1}{R} \frac{2}{\pi^2} = \frac{1}{4,93 R}.$$

Les procédés de calcul étant quelque peu arbitraires, il n'est pas étonnant de trouver une valeur différente de celle de la deuxième partie qui était $1/4,44 R$.

La courbe de la Fig. 12 donne les valeurs de $R\varrho$ en fonction de $1/a$ qui varie de 0 à 1.

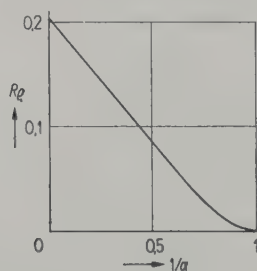


Fig. 12. Résistance d'un changement de section en fonction du rapport des rayons.

La modification de section dans un tuyau cylindrique a été étudiée dans un cas analogue [6], en utilisant un potentiel supplémentaire, raccordant les ondes planes de gauche à celles de droite. Ce potentiel est une somme infinie de termes, chacun d'eux étant le produit d'une fonction de r par une fonction de z . La courbe ($R\varrho$ en fonction de $1/a$) obtenue en première approximation a exactement la même forme que celle de la Fig. 12. Elle n'en diffère que par la valeur initiale ($1/a=0$) qui est 0,270 au lieu de 0,203.

II.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les mesures effectuées (sur résonateurs et tuyaux) donnent les amplitudes de pression en des points déterminés, au moyen de capsules manométriques à miroir spécialement sensibilisées [7]. On peut aussi mesurer les différences de phase entre deux points déterminés en y branchant deux capsules, les axes de leurs miroirs étant rectangulaires. Un point lumineux, vu par réflexion dans les deux miroirs, décrit une ellipse de Lissajous dont les dimensions donnent facilement la différence de phase.

On mesure aussi les amplitudes des déplacements (proportionnelles à celles des vitesses pour une fréquence donnée) par observation visuelle (oculaire micrométrique) ou par photographie de fines poussières d'amidon de quelques microns, en utilisant un ultra-microscope à long foyer (2 cm environ). Pour les fréquences employées, ces poussières reproduisent exactement, en amplitude et phase, les mouvements de l'air. Nous grouperons les résultats d'après les appareils utilisés.

5. Résonateurs

1° On sait [8] que la fréquence de résonance est donnée par la formule:

$$N = \frac{V}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{RU}} \quad (6)$$

dans laquelle V est la vitesse de propagation du son, U le volume du résonateur, R la résistance acoustique du goulot.

On admet que le mouvement de l'air est nul à l'intérieur du résonateur où il n'y a que des variations de pression. Inversement, les variations de pression sont nulles dans le goulot où il n'y a que des déplacements. Ces hypothèses ne sont qu'approximativement vérifiées.

Le déplacement de l'air ne tombe pas immédiatement à zéro hors du goulot, mais son amplitude décroît plus ou moins vite suivant la forme du résonateur. On en tient compte en écrivant pour la résistance:

$$R = \frac{L}{4\pi r^2} + \varrho \quad (7)$$

L est la longueur du goulot, supposé cylindrique, r son rayon et ϱ la résistance supplémentaire correspondant aux deux extrémités.

De même: les variations de pression ne s'annulent pas immédiatement à l'intérieur du goulot, mais leur amplitude diminue plus ou moins vite

suivant la forme du résonateur. Pour en tenir compte, il faudrait introduire un terme complémentaire s'ajoutant au volume U .

Soit un premier résonateur: c'est un cylindre plat, de rayon 6 cm, d'épaisseur 5 cm; l'embouchure est cylindrique, de longueur 6,2 cm, de rayon 0,8 cm (Fig. 13). Ce résonateur est excité par un tuyau sonore ouvert à son extrémité. Les ouvertures du tuyau et du résonateur sont, sauf indication contraire, face à face, à 6 cm l'une de l'autre.

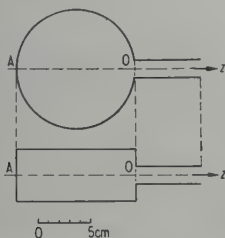


Fig. 13. Résonateur et son embouchure.

Lorsqu'on fait varier la fréquence de résonance, le tuyau excitateur est très court: 10 cm de longueur, pour un rayon de 2 cm. Il est lui-même alimenté par la plaque d'un téléphone dépolarisé ($R' = 4$ cm) recevant le courant, convenablement amplifié, d'un générateur à basse fréquence. La faible longueur du tuyau a pour conséquence que sa fréquence propre ($N = 850$ Hz environ) n'intervient pas dans les mesures, pas plus d'ailleurs que celle de la plaque du téléphone dont la première résonance est au voisinage de 700 Hz.

Si, au contraire, le résonateur a une fréquence déterminée, le tuyau est réglé pour cette fréquence, sa longueur étant approximativement égale au quart de la longueur d'onde, afin d'avoir des amplitudes plus grandes.

Dans le cas présent, la fréquence est $N = 100$ Hz. La Fig. 14 donne, à la fois, les vitesses sur l'axe de l'embouchure et sur son prolongement dans le résonateur, les amplitudes des variations de pression sur le même axe, enfin, les différences de phase entre A et un point déterminé de l'axe.

Si nous admettons que le rayon du goulot (0,8 cm) est petit par rapport à celui du résonateur (6 cm), nous aurons, à la jonction résonateur-embouchure le cas d'un tuyau débouchant dans un milieu semi-infini, correspondant au 2 de la première partie. Des valeurs de la vitesse sur l'axe, on peut tirer les valeurs asymptotiques du potentiel et, par suite, la résistance acoustique de la jonction.

Le potentiel est de la forme $\Phi_1 = A/z$ assez loin de l'embouchure, à l'intérieur du résonateur; de la forme $\Phi_2 = Bz + C$ assez loin à l'intérieur

de l'embouchure. Avec les unités de la Fig. 14, on a $B = 3$, puisque

$$v = 3 = \partial\Phi/\partial z.$$

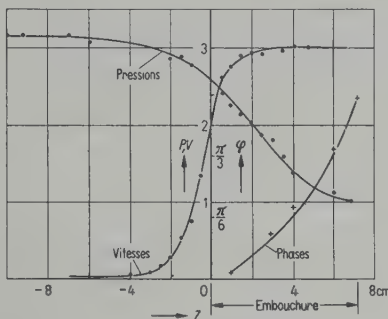


Fig. 14. Vitesses (V), variations de pression (P), phases (φ), mesurées sur l'axe du résonateur.

La condition de conservation de flux donne alors: $A = 0,96$; on en déduit la vitesse sur l'axe, assez loin de l'embouchure:

$$v = 0,96/z^2.$$

Elle correspond bien à la partie gauche de la courbe comme le montrent les nombres suivants:

z en cm	-4	-3	-2
v (calculée)	0,06	0,107	0,24
v (mesurée)	0,06	0,09	0,25

L'augmentation de potentiel entre Φ_1 et Φ_2 est mesurée par la surface comprise entre les ordonnées des points $z = 4$ et $z = -4$, assez éloignés de la jonction, l'axe des z et la courbe.

$$\Phi_1 = 0,96/4 = 0,24 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = 4 \times 3 + C = 12 + C$$

Cette surface ayant été trouvée égale à 13,06, on en tire:

$$13,6 = 12 + C - 0,24, \quad C = 1,30.$$

On en déduit, pour la résistance supplémentaire:

$$\rho = 1,30 / 3\pi 0,8^2 = 1/4,64.$$

Si le rayon du goulot était égal à l'unité, on aurait $\rho = 1/5,8$.

Cette valeur est notablement plus faible que celle trouvée dans la première partie (1/4,44). Il est vrai que la méthode utilisée est peu précise; en particulier, C a été obtenu par différence de deux quantités du même ordre de grandeur. Admettons pour les mesures d'amplitude une erreur relative possible de 1/100, ce qui est une limite dans la précision; cette erreur se retrouve dans l'expression du potentiel Φ_2 et l'erreur absolue sur C est alors 0,12. Toutes autres causes

d'erreur étant éliminées, en particulier celle qui proviendrait de la mesure de la surface, ϱ n'est connu qu'à 1/10 près.

D'autres mesures, pour des amplitudes plus faibles, ont donné pour ϱ les valeurs 1/4,83 et 1/5,38. Les amplitudes des déplacements à l'intérieur de l'embouchure sont, respectivement dans les trois cas, 0,3, 0,2 et 0,12 mm.

En revanche, les courbes représentant les amplitudes des vitesses sont tout à fait comparables aux courbes théoriques.

2° Pour étudier la correction aux deux bouts de l'embouchure, on peut mesurer les fréquences de résonance pour différentes longueurs de cette embouchure. Si, dans la formule (6), on remplace R par son expression (7), on voit que $1/N^2$ doit être une fonction linéaire de L ; elle peut s'écrire

$$\frac{1}{N^2} = \frac{4\pi U}{V^2} \frac{1}{r^2} (L + L_0),$$

L_0 étant la correction de longueur.

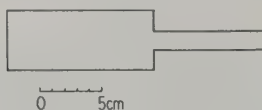


Fig. 15. Résonateur à embouchure variable.

Le résonateur utilisé est un cylindre allongé, de rayon 2,5 cm, de longueur 11,9 cm. L'embouchure, de longueur variable, a 0,8 cm de rayon (Fig. 15). On obtient la courbe de la Fig. 16. De la partie rectiligne on peut déduire la correction de longueur $L_0 = 1,22$ cm, à laquelle correspond une résistance $1/2,45$, ceci pour un rayon égal à 0,8. Pour un rayon égal à l'unité, la résistance serait $1/1,96$. Cette valeur est plus grande que la valeur théorique obtenue en ajoutant la résistance due à un tuyau débouchant dans un milieu semi-infini (à gauche) à la résistance due à un tuyau débouchant dans un milieu infini (à droite), soit $1/4,44 + 1/5,18 = 1/2,39$.

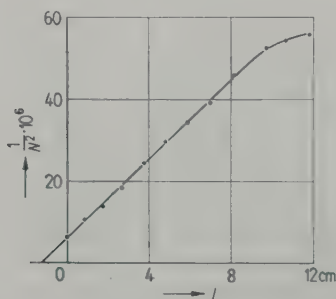


Fig. 16. Fréquence d'un résonateur en fonction de la longueur de son embouchure.

Le deuxième nombre est certainement erroné par suite de la présence du tuyau excitateur, ce qui explique la différence obtenue.

Remarquons enfin, qu'à partir de $L = 9,5$ cm on n'a plus une ligne droite. A ce moment, en effet, N est voisin de 141; le quart de longueur d'onde vaut 60 cm. Cette longueur ne peut être considérée comme grande par rapport à la dimension totale du résonateur (21,4 cm). Les conditions imposées ne sont plus vérifiées.

3° Si la longueur de l'embouchure est nulle (trou circulaire en paroi mince), on se trouve à peu près dans le cas 1 de la première partie.

Les mesures directes d'amplitudes de vitesse sont impossibles en raison de l'agitation des particules d'amidon au voisinage de l'ouverture, agitation due à des phénomènes circulatoires non périodiques qui montrent, d'ailleurs, dans ce cas, l'insuffisance de la théorie élémentaire des ondes sonores.

L'application de la formule (6) avec $R = 1/2 r$ où r est le rayon de l'ouverture, doit donner une confirmation de la valeur de cette résistance, au moins tant que r est petit devant les dimensions du résonateur. On voit que N^2 doit être proportionnel à r , ce que montre la Fig. 17. Cette courbe a été obtenue avec le même résonateur que dans le 2° cas.

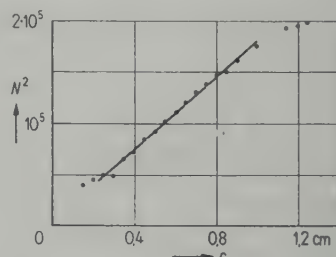


Fig. 17. Fréquence d'un résonateur en fonction du rayon de l'ouverture.

Les faibles valeurs de r ne conviennent pas; la résonance est mauvaise; d'autre part, l'épaisseur de la paroi (0,75 mm) n'est plus négligeable. La résistance de l'ouverture doit s'écrire

$$0,075/\pi r^2 + 1/2 r.$$

Pour $r = 0,2$ cm, les deux termes ci-dessus valent respectivement 0,6 et 2,5. Le premier n'est pas négligeable.

Pour les valeurs de r qui se rapprochent du rayon du résonateur lui-même, la formule ne peut plus s'appliquer; on ne se trouve plus dans le cas d'une ouverture faisant communiquer deux espaces très grands.

6. Tuyau cylindrique

Soit un tuyau cylindrique de laiton; son diamètre est de 4 cm; il est excité à l'une de ses extrémités par la plaque du téléphone.

1° Les corrections au bout ouvert, connues expérimentalement depuis longtemps, sont de l'ordre de $0,576 R$, R étant le rayon du tuyau, ce qui correspond à une résistance $1/3,92 R$ [9]. Nous sommes ici dans le cas 3 de la première partie; si les mesures directes des amplitudes sont difficiles, l'application de la formule élémentaire $N = V/4L$ pour le son fondamental d'un tuyau fermé à l'une de ses extrémités et ouvert à l'autre, dans laquelle on remplace L par $L + L_0$, permet de déterminer la correction L_0 . Malheureusement, il y a aussi une correction de longueur au voisinage de la plaque téléphonique dont on ne sait à peu près rien. La courbe de la Fig. 18 donne $L_0 = 2,5 \text{ cm} = 1,25 R$, ce qui montre que la correction près de la plaque est de même sens (allongement) et du même ordre que la correction au bout ouvert.

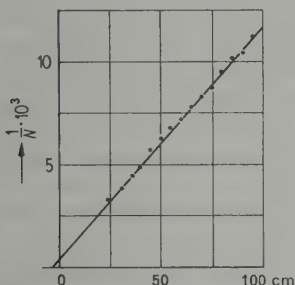


Fig. 18. Fréquence fondamentale d'un tuyau ouvert en fonction de sa longueur.

2° Les fréquences d'un tuyau cylindrique dont l'extrémité est constituée par une plaque mince, percée, en son centre, d'un trou circulaire, doivent rendre compte de la résistance acoustique correspondante.

Suivant la théorie élémentaire de BERNOULLI [10], supposons le potentiel des vitesses égal à

$$\Phi = \cos kx \quad (\text{Fig. 19}) \quad \text{avec} \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Soient R et r les rayons respectifs du tuyau et de l'ouverture, L la longueur du tuyau, ϱ la résistance acoustique du trou. Écrivons que cette dernière est égale au quotient du potentiel par le débit:

$$\varrho = \frac{\cos kL}{k(\sin kL)\pi R^2} \quad \text{ou} \quad kL \operatorname{tg} kL = \frac{L}{\pi R^2 \varrho}.$$

Si nous prenons pour ϱ la valeur approchée $1/2r$, valable tant que r est petit devant R , on a:

$$kL \operatorname{tg} kL = 2rL/\pi R^2.$$

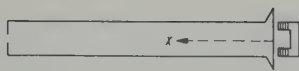


Fig. 19. Tuyau partiellement bouché.

Construisons les courbes donnant la fréquence N en fonction de r , pour le son fondamental et pour les premiers partiels. Soit $L = 157 \text{ cm}$, $R = 2 \text{ cm}$, $V = 340 \text{ m/s}$; on obtient les courbes de la Fig. 20.

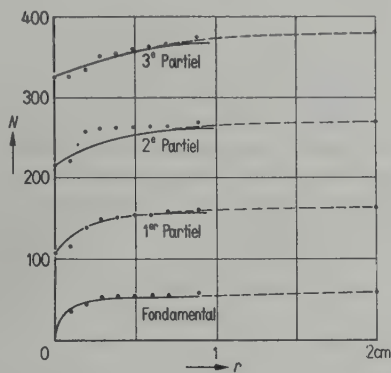


Fig. 20. Fondamental et partiels d'un tuyau partiellement bouché.

Les mesures expérimentales, indiquées sur ces mêmes courbes, ne sont guère satisfaisantes. Pour de faibles valeurs de r , le tuyau « parle » difficilement et suivant un régime complexe (harmoniques et partiels). Pour les valeurs de r qui se rapprochent de R , l'expression de la résistance n'est plus valable: la résistance limite pour $r = R$ étant $1/4 R$ et non $1/2 R$. La courbe de la Fig. 12, pour les faibles valeurs de $1/a$ est assimilable à une droite. On peut donc écrire, pour la résistance du trou, lorsque r est voisin de R :

$$\varrho = \frac{1}{4r} + \frac{1}{4r} \left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

le premier terme représentant la résistance vers l'extérieur du tuyau, le second, la résistance vers l'intérieur. Dans ces conditions, les courbes de la Fig. 20 sont légèrement modifiées et permettent d'aller jusqu'à $r = R$. Elles sont tracées en traits discontinus.

3° Le cas le plus facile à étudier est celui d'une modification de section dans un tuyau cylindrique fermé; les circulations non périodiques sont en effet beaucoup plus réduites qu'au voisinage d'une ouverture. Sans donner le détail des modes vibratoires d'un tel appareil (tuyau à cheminée), indiquons que l'on peut avoir, dans le plan de changement de section, un ventre, un nœud ou une position intermédiaire. Le seul cas intéressant

est celui où il y a un ventre. Les amplitudes de vitesses seraient pratiquement constantes de part et d'autre du plan considéré, jusqu'à quelques centimètres, s'il n'y avait pas de changement de section. La mesure des amplitudes permettra donc l'évaluation de la résistance comme nous l'avons indiqué dans la première partie.

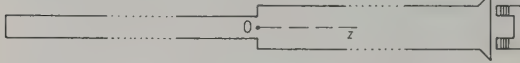


Fig. 21. Tuyau avec changement de section.

Suivant la Fig. 21, nous prendrons deux tuyaux de rayons respectifs 1 et 2 cm; le premier ayant une longueur de 144 cm, le second de 48 cm. Dans ces conditions, le premier partiel a pour fréquence $N = 176$ Hz et il y a un ventre dans le plan de la modification de section.

Dans la branche de droite, nous prendrons comme potentiel, assez loin de 0, $\Phi = Az$; dans la branche de gauche, nous aurons de même $\Phi_2 = 4Az + B$, puisque le rapport des sections est $1/4$.

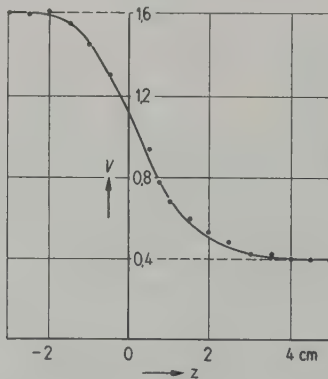


Fig. 22. Tuyau avec changement de section, vitesses sur l'axe.

On obtient la courbe de la Fig. 22. On voit qu'il faut prendre $A = 0,4$, valeur limite de la vitesse pour z assez grand; l'autre valeur limite est alors $4 \times 0,4 = 1,6$. Prenons les points $z = 5$ et $z = -4$. S'il n'y avait pas de résistance supplémentaire, la variation de potentiel serait

$$0,4 \times 5 + 1,6 \times 4 = 8,4.$$

La différence réelle, mesurée d'après l'aire de la courbe est 8,83, d'où $B = 0,43$, et par suite, pour la résistance équivalente, la valeur

$$\varrho = 0,43 / 1,6 \pi r^2 = 1 / 11,7.$$

La courbe théorique de la Fig. 12 donnerait, avec $a = 2; 0,84 = 1 / 11,9$.

D'autres mesures, pour des amplitudes respectivement plus grande et plus petite, ont donné $1/12,1$ et $1/12,4$. Pour de grandes amplitudes (par exemple, supérieures à 0,2 mm) la condition du rapport des vitesses limites n'est plus satisfaite.

Il faudrait poursuivre ces mesures en faisant varier le rapport des sections et étudier spécialement ce qui se passe pour R'/R voisin de 1 ou très grand.

De toutes manières, les hypothèses de la première partie rendent compte de l'allure des phénomènes. On peut dire qu'elles en rendent compte quantitativement à la précision des mesures expérimentales. Nous avons vu plus haut que celle-ci était assez faible. Est-il possible de l'améliorer? Sans doute, en perfectionnant les techniques. Cependant, on ne saurait aller très loin dans cette voie à cause de la condition imposée au début de cet article: les dimensions de l'espace acoustique doivent rester petites devant le quart de la longueur d'onde.

On pourrait traiter le problème théorique en tenant compte de la propagation du mouvement vibratoire. Il reste que ce n'est encore qu'une approximation qui ne tient pas compte des phénomènes accessoires tels que les déplacements non périodiques de l'air. Pour que ces derniers soient tout à fait négligeables, il faudrait utiliser des amplitudes très faibles; mettons, pour fixer les idées, 20 fois plus faibles que celles que j'ai utilisées, soit de l'ordre de 5 microns. Pour une fréquence $N = 100$ Hz, cela correspond à des amplitudes de variation de pression de 14 baryes. Les mesures ne sont plus possibles.

(Reçu le 3 août 1954.)

Bibliographie

- [1] DAVIS, A. H., *L'Acoustique moderne*. Dunod, Paris 1936, p. 76.
- DARMOIS, E., *Vibrations acoustiques*. S.E.D.E.S. Paris 1948, p. 152.
- [2] RAYLEIGH, Lord, *Theory of Sound*, 2nd ed. Macmillan and Co, London, II, p. 176.
- [3] DURAND, E., *Électrostatique et magnétostatique*. Masson, Paris 1953, p. 376.
- [4] voir [3], p. 461.
- [5] voir [3], p. 397.
- [6] KARAL, F. C., The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section. *J. acoust. Soc. Amer.* **15** [1953], 327.
- [7] GUITTARD, J., Analyse de mouvements vibratoires dans un tuyau sonore. *Acustica* **2** [1952], 232.
- [8] voir [2], p. 174.
- [9] voir [2], p. 203.
- [10] BOUASSE, H., *Tuyaux et résonateurs*. Delagrave, Paris 1929, p. 100.

SUBJEKTIVE BEWERTUNG DER SCHALLDÄMMUNG, UNTERSUCHT AN ELEKTRISCH NACHGEBILDETEN SCHALLDÄMMKURVEN

von H.-J. RADEMACHER

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Mit Hilfe eines elektrischen Filters werden Schalldämmkurven nachgebildet und durch Lautstärkevergleiche die subjektive Dämmwirkung der entsprechenden Wände untersucht. In mehreren Versuchsreihen wird festgestellt, wie gewisse Veränderungen der Schalldämmung einmal einer frequenzunabhängig dämmenden Wand und dann der „Sollwand“ empfunden werden. Ferner werden Wände gleicher mittlerer Schalldämmzahl, aber unterschiedlicher Form der Dämmkurve untersucht, wobei man findet, daß bei den üblichen Typen von Wänden und Geräuschen die Angabe einer Zahl zur Kennzeichnung der Schalldämmung ausreicht. Bei Untersuchungen über Trittschalldämmung wird geprüft, wie sich die Lautstärke eines von der „Solldecke“ abgestrahlten Geräusches ändert, wenn dessen Pegel in Oktavbereichen variiert wird. Außerdem wird die subjektive Wirkung der Trittschallverbesserung einer Hohlkörperdecke durch Estriche ermittelt.

Summary

The subjective sound insulation afforded by structures is investigated by building up insulation curves with an electrical filter, to show how modifications of the frequency characteristic may affect the resulting insulation. It appears unnecessary to specify by more than one parameter the insulation afforded by common types of walls to the usual types of noise. In an investigation on the insulation of footfall noise, the effect of varying the level in octave stages is shown as well as the improvement afforded in this case by covering layers on hollow floors.

Sommaire

On a reproduit des courbes d'amortissement acoustique au moyen d'un filtre électrique, et on a étudié, par comparaison des intensités sonores, l'effet subjectif d'amortissement produit par les parois correspondantes. On a établi comment certaines variations de l'amortissement acoustique sont perçues tantôt comme celles d'une paroi produisant un isolement indépendant de la fréquence tantôt comme celles d'une «paroi théorique». On a étudié, en outre, des parois ayant un même coefficient d'amortissement acoustique moyen, mais dont les allures des courbes d'amortissement sont différentes; cette étude a montré qu'il suffit d'un seul nombre pour caractériser l'amortissement acoustique, dans le cas des types usuels de parois et de bruits. Au cours de recherches sur l'amortissement du bruit des pas, on a déterminé comment varie l'intensité subjective d'un bruit transmis par le plafond théorique, quand le niveau de ce bruit varie d'octave en octave. On a déterminé en outre l'impression subjective d'amélioration, au point de vue bruit des pas, d'un plafond carrelé à éléments creux.

1. Einleitung

Seit einiger Zeit sind Bestrebungen im Gange, an Stelle der mittleren Schalldämmzahl und der Normtrittlautstärke für die Luftschall- bzw. Trittschalldämmung die Bewertung durch Sollkurven einzuführen. In diesem Zusammenhang ist es wünschenswert, Klarheit über die subjektive Wirkung der Schalldämmung zu schaffen. Durch geeignete subjektive Lautstärkevergleiche sollen insbesondere Aussagen gemacht werden über die Wirkung von Abweichungen von den Sollkurven und über die Bedeutung verschiedener Steilheiten der Dämmkurven. Dabei werden mehrere unterschiedliche Typen von Geräuschen verwendet. Um solche Untersuchungen systematisch durchführen zu können, ist eine erhebliche Zahl von Meßobjekten notwendig. Das bedeutet

großen Aufwand an Material und Zeit, falls man Wände und Decken wirklich bauen muß. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, werden die gewünschten Dämmkurven mittels eines elektrischen Filters nachgebildet. Dadurch wird es möglich, eine nahezu unbegrenzte Zahl an Variationen in der Dämmung zu erhalten.

2. Beschreibung des Nachbildungsfilters

Der grundlegende Gedanke beim Bau des Filters war, eine vorgegebene Dämmkurve stückweise zu approximieren. Der gesamte zu übertragende Frequenzbereich wird in mehrere Bereiche unterteilt. Für jedes dieser Frequenzbänder wird ein Bandpaß gebaut, dessen Durchlaßdämpfung den Pegel des zugehörigen Bandes bestimmt. Je ein in Serie geschaltetes Dämp-

fungsglied kann diese Dämpfung verändern, wodurch die gewünschte Wandsdämmung im betreffenden Bereich erzielt wird. Durch Parallelschaltung aller Bandpässe läßt sich ein beliebig breites Frequenzband erfassen und eine vorgegebene Dämmkurve durch eine treppenförmige Kurve annähern.

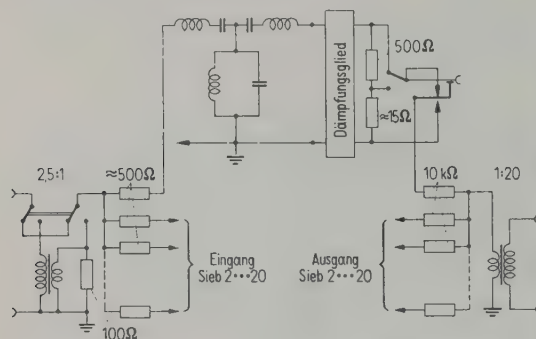


Abb. 1. Schaltung des Nachbildungsfilters.

In der praktischen Ausführung reicht es aus, insgesamt den Bereich von 50 Hz...10 kHz zu erfassen. Die einzelnen Bandpässe wurden ab 200 Hz als Terzsiebe gebaut. Unterhalb 200 Hz genügen drei Filter von 50...100 Hz, 100...150 Hz und 150...200 Hz Bandbreite den Anforderungen. Einzelheiten der Schaltung sind aus Abb. 1 zu sehen. Jedes Sieb besteht aus einer Grundkette in T-Schaltung mit einem Wellenwiderstand von 500 Ω [1]. Ein vorgeschalteter Widerstand von etwa 500 Ω stellt den richtigen Quellwiderstand her. Geringe Änderungen dieses Widerstandes dienen außerdem dazu, die Durchlaßdämpfungen aller Siebe einander gleich zu machen. Die Dämpfungsglieder sind in Stufen von 2,5 dB regelbar von 0...30 dB. Durch Unterteilung der Abschlußwiderstände im Verhältnis 32 : 1 ist es möglich, die Dämpfung um weitere 30 dB zu erhöhen. Um die Filter untereinander zu entkoppeln, werden ihre Ausgänge über je einen Widerstand von 10 k Ω zusammengeschaltet. Dadurch ist jedes Filter stets mit demselben Widerstandswert abgeschlossen und der Ausgangswiderstand der Gesamtschaltung ist konstant gleich 500 Ω .

Die größte Schwierigkeit bestand darin, die einzelnen Filter so aufeinander abzustimmen, daß die Phase der Ausgangsspannungen benachbarter Filter möglichst ohne Einfluß auf ihre Addition bleibt. Für jede Frequenz interferieren ja Anteile aus mehreren Filtern. Das ist besonders kritisch in der Nähe derjenigen Frequenzen (Anschlußfrequenzen), bei denen sich die Beiträge benachbarter Siebe mit gleicher Amplitude addieren. Bei ungünstiger Phasenlage kann es geschehen,

daß diese Frequenzen ausgelöscht werden. Darum wurde als Anschlußfrequenz diejenige Frequenz gewählt, bei der die Spannungsamplitude um 6 dB abgefallen ist. Dann befindet man sich so weit im Sperrbereich jedes Filters, daß die Phasenverschiebung gegenüber dem Durchlaßbereich etwa +180° bzw. -180° beträgt. Ferner

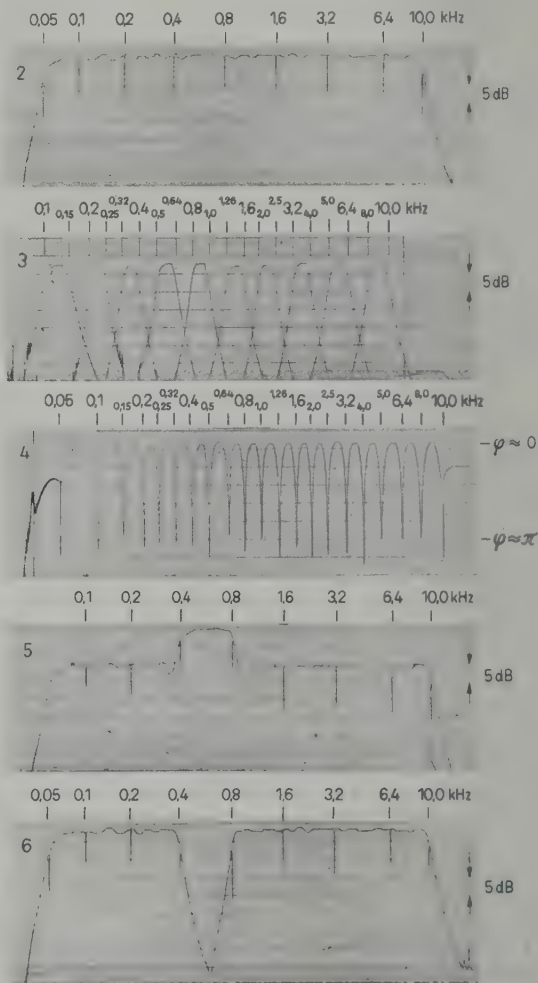


Abb. 2. Frequenzgang des Nachbildungsfilters, alle Dämpfungsglieder in Stellung 0 dB.

Abb. 3. Durchlaßkurven von zehn einzelnen Filtern.

Abb. 4. Phasendifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung.

Der Ausgangsspannung wurde ein gleich großer Teilbetrag der Eingangsspannung überlagert und die resultierende Spannung mit dem Pegelschreiber in Abhängigkeit von der Frequenz aufgezeichnet. Die Anschlußfrequenzen sind die Stellen maximaler Phasendifferenz.

Abb. 5. Frequenzgang bei Erhöhung des Pegels in der Oktave 400...800 Hz um 10 dB (s. Versuchsreihe 1a).

Abb. 6. Frequenzgang, wenn die drei Terzsiebe der Oktave 400...800 Hz kurzgeschlossen sind.

ist der Dämpfungsanstieg in diesem Gebiet maximal, so daß schon bei geringer Abweichung von der Anschlußfrequenz der Beitrag eines Filters stark überwiegt, der des anderen also selbst bei ungünstiger Phasendifferenz nur geringen Einfluß auf die Summenamplitude hat. Nach diesen Gesichtspunkten wurden die Filterelemente berechnet [1].

Über die Übertragungseigenschaften des Nachbildungsfilters geben die Abbildungen 2...6 Auskunft.

3. Untersuchungen über Luftschalldämmung

A) Meßmethode

Die Schalldämmung von Wänden und Decken wurde bislang nur aus objektiven Messungen ermittelt, indem mittels Schallpegelmessers der Schalldruckpegel vor und hinter dem Prüfobjekt in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen wurde. Hieraus gewinnt man die mittlere Schalldämmzahl. Für die Praxis hat ihre Verwendung den Vorteil, die Schalldämmung durch eine einzige Zahl kennzeichnen zu können [2]. Ein Nachteil liegt darin, daß durch sie die frequenz- und amplitudenabhängige Empfindlichkeit des menschlichen Ohres nicht berücksichtigt wird. Deshalb ist man bemüht, die Sollkurve einzuführen (Abb. 7), denn diese legt nicht nur eine

steht noch nicht fest, ob sich der damit verbundene größere Aufwand wirklich lohnt. Die Probleme, die in diesem Zusammenhang auftreten, sollen durch subjektive Untersuchungen gelöst werden, bei denen die Wirkung des von verschiedenen Wänden durchgelassenen Schalles auf die Versuchspersonen beobachtet wird. Als subjektiv zu bestimmende Größe, welche die Güte der Schalldämmung charakterisiert, dient die Lautstärke des Schalles nach Durchgang durch Wand oder Decke. Auf die Feststellung einer Lästigkeitswirkung des durchgelassenen Schalles auf den Beobachter wurde von vornherein verzichtet, da dieser Begriff zu vieldeutig und verschwommen ist, als daß mit ihm allgemeingültige Aussagen gemacht werden können.

Da in unserem Falle nicht so sehr die absolute Lautstärke interessiert als vielmehr die Lautstärkeänderung eines Geräusches beim Durchgang durch eine Wand, wird in den Versuchen das Geräusch hinter der Wand jeweils mit dem Originalgeräusch vor der Wand verglichen. Dieser Vergleich läßt sich subjektiv zudem leichter und genauer ausführen als der Vergleich zwischen Geräusch und 1000 Hz-Ton. Der Ersatz der Wand durch eine elektrische Apparatur macht das Verfahren leicht durchführbar.

Der Betrag der Dämpfung, der notwendig ist, um den Originalschall so weit zu dämpfen, daß er gleichlaut mit dem durchgelassenen wird, dient als Maß für die subjektiv beurteilte Schalldämmung der Prüfwand und wird im folgenden als „Hördämmung“ bezeichnet.

Zur praktischen Ausführung der Hörtests ist folgendes zu sagen. Durchschnittlich 20 Beobachter befinden sich im Hörsaal des Instituts, dessen raumakustische Eigenschaften denen eines normalen Wohnraumes vergleichbar sind (Nachhallzeit etwa 1 s). Da der in diesem Raum herrschende Störpegel 30...40 dB beträgt, ist es für eine größere Meßgenauigkeit notwendig, den Pegel der Testgeräusche auf etwa 50 dB festzulegen. Die auf einem endlosen Magnetophonband aufgenommenen Geräusche können auf zwei verschiedenen Übertragungswegen über den Lautsprecher L abgestrahlt werden (Abb. 8). Dem

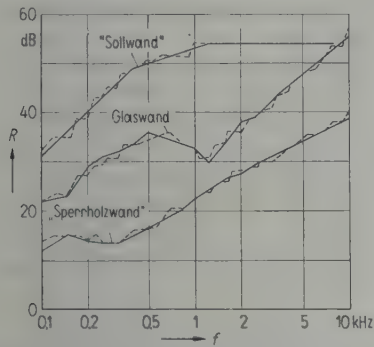


Abb. 7. Nachbildung von Dämmkurven;
— vorgegebene Kurve,
--- nachgebildete Kurve.
Glaswand und Sperrholzwand nach SCHOCH [2],
Sollwand nach DIN 52211 [5]. Oberhalb von 3,2 kHz
sind die Kurven willkürlich vorgegeben worden.

mittlere Schalldämmzahl fest, die eine der Erfahrung angemessene Dämmung garantiert, sondern sie schreibt auch einen bestimmten Frequenzgang der Dämmung vor, der sowohl der Ohrempfindlichkeit als auch den Gegebenheiten der Bautechnik Rechnung trägt. Wenn auch die Einführung dieses Verfahrens vom physiologischen Standpunkt aus berechtigt erscheint, so

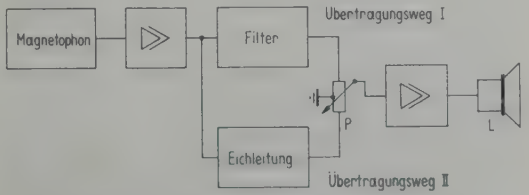


Abb. 8. Blockschaltbild der Versuchsanordnung.

Übertragungsweg I mit dem Nachbildungsfilter entspricht die akustische Leitung über die Wand. Der Übertragungsweg II dagegen enthält statt des Filters eine Eichleitung, mit der das Originalgeräusch gedämpft wird. Vor Beginn jedes Tests sind beide Übertragungswege gleichwertig in bezug auf Lautstärke und Spektrum des Testgeräusches. Nach Einstellung der gewünschten Dämmkurve am Filter werden das dadurch veränderte Geräusch und das Originalgeräusch den Versuchspersonen in 4 bis 5maligem Wechsel je 2...3 s dargeboten. Der Druckpegel des von der Prüfwand durchgelassenen Schalles (Übertragungsweg I) bleibt konstant, während derjenige des Originalschalles in Stufen von 1 bis 1,5 dB geändert wird. Der Beobachter muß sich stets entscheiden, welcher der beiden zu vergleichenden Schalle lauter ist („Ja-Nein-Methode“) [3]. Der gesuchte Gleichlautwert zeichnet sich dann dadurch aus, daß je 50 % der Urteile auf ein Geräusch entfallen. Die diesem Wert entsprechende Dämpfung des Originalschalles ist aber die „Hördämmung“ der Prüfwand. Ein Beispiel zur Auswertung der Tests bringt Abb. 9.

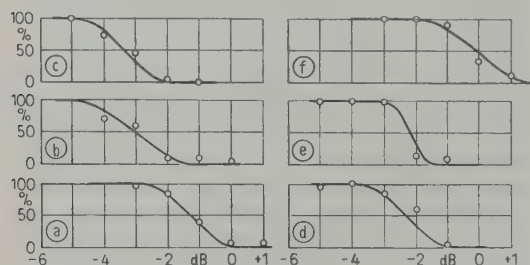


Abb. 9. Auswertungsbeispiel (vgl. Abb. 11b, Sprachtest). Abszisse: Dämpfung des Originalschalles in bezug auf die Hördämmung der Sollkurve; Ordinate: Prozentsatz der Urteile, die den Originalschall als lauter bezeichnen; $\circ \circ \circ$ Meßpunkte. Den Teilbildern a, b...f sind die in Abb. 11b eingetragenen Ergebnisse für die Oktaven 100...200 Hz, 200...400 Hz bis 3,2...6,4 kHz entnommen.

Es ist zu erwarten, daß die Hördämmung nicht nur von der Wanddämmung, sondern auch von der Art der benutzten Geräusche abhängt. Darum muß das Verhalten einer Wand mit mehreren Geräuschen geprüft werden. Da Wert darauf gelegt wird, Ergebnisse für den praktischen Wohnungsbau zu erhalten, werden insbesondere Tests mit Sprache und Musik durchgeführt. Daneben werden drei Variationen von Widerstandsräuschen zur Untersuchung herangezogen, da sich diese leicht reproduzieren lassen und geeignet sind, den Einfluß z. B. von Bandbreite und Spektrum auf die Hördämmung zu studieren. Alle

Geräusche wurden auf endlose Magnetophonbänder aufgenommen, so daß stets derselbe Schall beurteilt werden kann (besonders wichtig bei Sprache und Musik). Dadurch soll vermieden werden, daß bei der abwechselnden Darbietung der Vergleichsgeräusche zufällig Stellen geringer Lautstärke mit Stellen größerer Lautstärke verglichen werden. Zur Herstellung der Sprachbänder sprachen gleichzeitig sechs Personen sechs verschiedene Sätze, die so zusammengestellt sind, daß alle Laute möglichst gleichmäßig auf die ganze Bandlänge verteilt sind. Die Verständlichkeit wurde dadurch völlig zum Verschwinden gebracht, denn es muß verhindert werden, daß die Hörer eventuell aus dem Verständlichkeitsgrad auf die Lautstärke schließen. Das Frequenzspektrum stimmt gut mit denen überein, die aus speziellen Untersuchungen bekannt sind [4].

Auch beim Musikband wurde darauf geachtet, durch Übereinanderspielen von zwei verschiedenen Orchesterdarbietungen eine geringe Dynamik zu bekommen und zugleich das Spektrum zeitlich möglichst konstant zu halten. Es ist natürlich fraglich, ob diese Musik als Standard gelten kann.

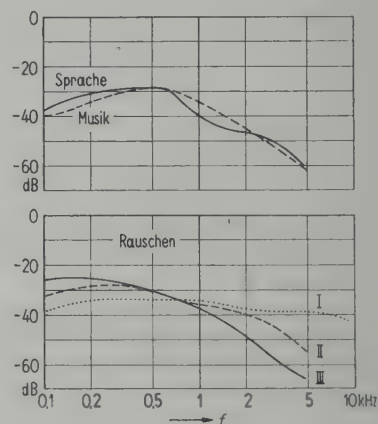


Abb. 10. Frequenzspektren der Testgeräusche. Als Ordinate ist der Pegel/Hz relativ zum Gesamtpegel, der am Beobachtungsort vorhanden ist, aufgetragen.

Bei der Auswahl der Rauschbänder kam es einmal (Band I) darauf an, ein „weißes Rauschen“ (bezüglich des Frequenzbandes 0,1...10 kHz) zu bringen. Das Spektrum des auf dem Magnetophonband II aufgenommenen Rauschens ist den Spektren des Sprach- und des Musikbandes ähnlich. Beim Band III sind die tiefen Frequenzen besonders bevorzugt. Die aus Oktavanalysen gewonnenen Spektren aller Testgeräusche sind in Abb. 10 aufgezeichnet.

B) Messungen

Bei der Bewertung der Schalldämmung durch die Sollkurve ist vorgesehen, eine mittlere Abweichung von 2 dB im ungünstigen Sinne (geringere Dämmung) zuzulassen [5]. Die Zweckmäßigkeit dieser Bedingung soll in der ersten Versuchsreihe subjektiv überprüft werden. Als Vorversuch ist in der Gruppe (a) der 1. Versuchsreihe festzustellen, wie sich solche mittleren Abweichungen bei frequenzunabhängiger Wanddämmung auswirken. Die gewünschte Abweichung wird so realisiert, daß man die Dämmung innerhalb einer Oktave um 10 dB verringert, was im Bereich von 100...3200 Hz (dem Definitionsbereich von Sollkurve und mittlerer Schalldämmzahl) gerade einer mittleren Abweichung von 2 dB entspricht. Den Frequenzgang des dementsprechend eingestellten Nachbildungsfilters zeigt Abb. 5 am Beispiel der Oktave 400...800 Hz. Die Versuche werden so ausgeführt wie es oben beschrieben wurde.

Die Ergebnisse der Gruppe (a) der 1. Versuchsreihe können den Abbildungen 11a, 12a, 14a entnommen werden. In diesen Abbildungen gibt die Abszisse die Oktave an, in der jeweils die Dämmung um 10 dB bzw. um 5 dB vermindert wurde, die Ordinate die dazu gehörende Abnahme der Hördämmung.

Für Sprache ist demnach zu ersehen, daß die Hördämmung um 1 dB abnimmt, wenn die Wanddämmung in der Oktave 100...200 Hz geändert wird. Zu den Oktaven 200...400 Hz und 400...800 Hz gehören bereits maximale Werte von -3,5 dB, während in den folgenden Oktaven die Hördämmung sich nur noch um -2 bzw. -1 dB ändert. Im Mittel ergibt sich ein Wert von etwa -2 dB, also derselbe Betrag, um den auch die mittlere Schalldämmung vermindert wird.

Bei der Betrachtung der für die übrigen Geräusche erhaltenen Resultate fällt sofort auf, daß die Frequenzabhängigkeit der Hördämmung von Fall zu Fall deutliche Unterschiede aufweist. Es ergibt sich jedoch überall der gleiche Mittelwert von etwa -2 dB. Auch die Beträge der Maxima sind nahezu einander gleich (etwa -3 dB). Während aber dieses Maximum bei Sprache zwischen 200...800 Hz zu finden ist, verschiebt es sich bei den anderen Geräuschen (vom Rauschen III abgesehen) nach höheren Frequenzen. Dieses Verhalten läuft parallel mit der unterschiedlichen spektralen Energieverteilung der Geräusche. Aus den Spektren der Abb. 10 ist ersichtlich, daß in der Reihenfolge Rauschen III, Sprache, Musik, Rauschen II, Rauschen I der Beitrag der hohen Frequenzen zur Gesamtenergie wächst, was im Sinne der Ergebnisse liegt.

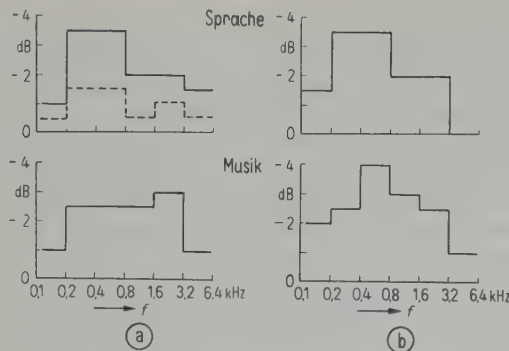


Abb. 11. Abnahme der Hördämmung in Abhängigkeit von der Frequenz, wenn die Dämmung in je einer Oktave um 10 dB verringert wird (--- Dämmung nimmt nur um 5 dB ab).
(a): frequenzunabhängig dämmende Wand,
(b): Sollwand;
Testgeräusche: Sprache bzw. Musik.

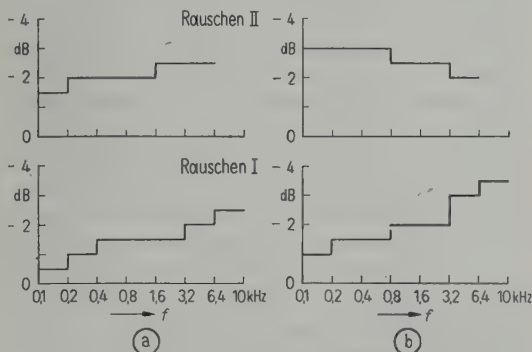


Abb. 12. Wie bei Abb. 11; Testgeräusche: Rauschen I bzw. Rauschen II.

In der Gruppe (b) der 1. Versuchsreihe wird dann die Wirkung von Abweichungen von der Sollwanddämmung untersucht. Mit dem Nachbildungsfilter wird also die Sollkurve nachgebildet und nacheinander diese Dämmung in Oktavbereichen um 10 dB verringert. Die entsprechenden Abnahmen der Hördämmung der Sollwand sind in den Abbildungen 11b und 12b dargestellt.

Bei Verwendung von Sprache erhält man fast dasselbe Resultat wie in der Gruppe (a) der 1. Versuchsreihe. Die die hohen Frequenzen relativ stark dämmende Sollwand bewirkt jetzt lediglich, daß sich die Hördämmung in der Oktave 3,2...6,4 kHz nicht mehr ändert. Außerdem nimmt sie gegenüber dem analogen Versuch der Gruppe (a) in der tiefsten Oktave etwas stärker ab. Bei der Musikdämmung ergibt sich ein deutliches Maximum zwischen 400...800 Hz. Zwischen 100...200 Hz wird die Hördämmung um 2 dB verringert (gegenüber 1 dB bei fre

quenzunabhängiger Wanddämmung). Der Test mit dem Rauschen II liefert Maxima für die drei tiefsten Oktaven. Deutlicher als bei den anderen Geräuschen zeigt hier der Vergleich mit der Gruppe (a) den Einfluß der Frequenzabhängigkeit der Sollkurve: in der Gruppe (a) nahm die Hördämmung mit steigender Frequenz immer mehr ab, in der Gruppe (b) dagegen immer weniger.

Das bemerkenswerteste Resultat aber liefert der Test mit dem Rauschen I („weißes Rauschen“), denn obwohl die hohen Frequenzen jetzt stärker gedämmt werden als in Gruppe (a), wird eine maximale Verringerung der Hördämmung im Bereich von 6,4...10 kHz beobachtet. Der Absolutbetrag dieses Wertes ist sogar auf 3,5 dB gestiegen. Wegen der relativ geringen Dämmung der Sollkurve für tiefe Frequenzen wurde erwartet, daß eine Verschlechterung der Dämmung in jenem Gebiet verstärkt wahrnehmbar ist. Das ist jedoch nur in geringem Maße zu beobachten.

Bei allen vier Geräuschen (mit Rauschen III wurde hier nicht getestet) ergibt sich eine mittlere Abnahme der Hördämmung von $-2,5$ dB. Sowohl dieser Wert als auch die Maxima sind größer als in der Gruppe (a) der 1. Versuchsreihe. Der Grund dafür ist sicherlich der, daß die Bandbreite der Geräusche nach dem Durchgang durch die Sollwand geringer geworden ist und deshalb die Variationen in der Dämmung mehr zur Gesamtlautstärke beitragen als vorher.

Als Ergänzung zur Gruppe (a) der 1. Versuchsreihe wurde eine 2. Versuchsreihe mit Sprache durchgeführt, bei der die Dämmung in den Oktaven nur um 5 dB verringert wurde (in Abb. 11a gestrichelt). Wie nicht anders zu erwarten, ändert sich die Hördämmung hier weniger als beim 10 dB-Versuch. Eine wesentliche Verschlechterung der Dämmung wird eigentlich nur im Bereich von 200...800 Hz empfunden, wo schon zuvor die Maxima lagen. Der Mittelwert beträgt -1 dB, was wieder der Abnahme der mittleren Schalldämmzahl um denselben Betrag entspricht.

In der 3. Versuchsreihe wurde die Dämmung statt nur in einer Oktave innerhalb einer Doppeloktave um 10 dB herabgesetzt, was einer mittleren Abweichung um 4 dB gleichkommt. Das Ergebnis dieser Tests, die mit dem Rauschen I ausgeführt wurden, zeigt Abb. 13.

Insgesamt wurden sechs Doppeloktaven durchgemessen, deren Grenzfrequenzen auf der Abszisse in Abb. 13 eingetragen sind. Der Frequenzgang der Hördämmung bei frequenzunabhängiger Wanddämmung kann als Bestätigung des Ergebnisses der früheren Versuchsreihe mit 10 dB-

Absenkungen in einer Oktave aufgefaßt werden. Die Beträge, um die die Hördämmung abnimmt, sind jetzt natürlich wesentlich größer. So werden maximal -7 dB bei hohen Frequenzen gemessen und im Mittel etwa -4 dB.

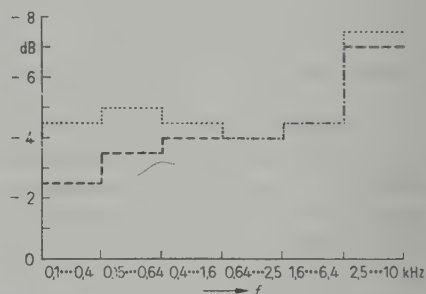


Abb. 13. Abnahme der Hördämmung, wenn die Schalldämmzahl in einer Doppeloktave um 10 dB gesenkt wird;
- - - frequenzunabhängige Dämmung,
... Schalldämmung.

Bei den Variationen der Sollkurve wird praktisch für alle Doppeloktaven — bis auf eine Ausnahme — dieselbe Verminderung der Schalldämmung empfunden (-4 ... -5 dB). Wiederum ist es der Bereich hoher Frequenzen, der mit $-7,5$ dB um 3 dB über den anderen Werten liegt, eine Erscheinung, die qualitativ schon in der Versuchsreihe 1(b) zutage trat. Ebenfalls findet man wieder, daß der mittlere Wert für die Sollwand (-5 dB) und auch das Maximum größer sind als bei frequenzunabhängiger Wanddämmung. Daß die Frequenzabhängigkeit der Sollkurve von Einfluß ist, beweisen der stärkere Rückgang der Hördämmung in den unteren Doppeloktaven, was hier weit auffälliger ist als bei der 1. Versuchsreihe.

In den bisherigen Versuchen handelte es sich stets um eine Verringerung der Schalldämmung in bestimmten Teilbereichen. Inwieweit besteht nun eine Möglichkeit, durch Verbesserung der Dämmung in denselben Gebieten eine Zunahme der Hördämmung zu erzielen? Von vornherein ist zu erwarten, daß diese positiven Beträge nur gering sein werden, denn die Gesamtenergie und somit die Lautstärke eines Geräusches kann selbst durch völlige Auslöschung der Energie eines Frequenzbandes nicht beliebig verkleinert werden, es sei denn, die gesamte Bandbreite des betreffenden Geräusches ist nicht wesentlich größer als die jenes Teilbandes. Da deshalb mit einer Kompensation von Gebieten geringerer Dämmung durch solche höherer Dämmung, als z. B. durch die Sollkurve vorgeschrieben, nicht zu rechnen ist, werden nach DIN 52211 zur Be-

urteilung der Schallisolation nur die Abweichungen von der Sollkurve im ungünstigen Sinne herangezogen.

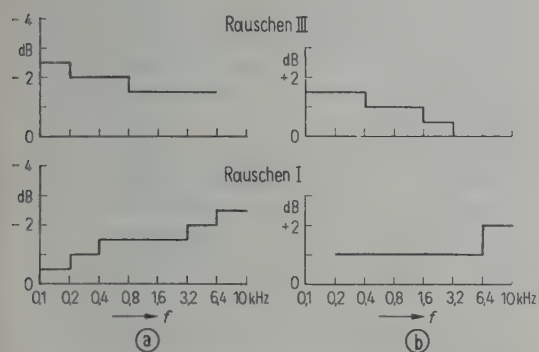


Abb. 14. (a): Abnahme der Hördämmung, wenn die Dämmung in je einer Oktave um 10 dB verringert wird (frequenzunabhängige Wanddämmung). (b): Zunahme der Hördämmung, wenn der Energiepegel in einer Oktave um 20 dB gesenkt wird.

Um diese Überlegung zu prüfen, wurden in der 4. Versuchsreihe Tests mit Rauschen I und Rauschen III ausgeführt (Rauschen I als Beispiel für ein breitbandiges, Rauschen III für ein schmalbandiges Geräusch). Da es sich zeigt, daß ein Dämmzuwachs von 10 dB/Oktave nur sehr wenig bemerkbar ist, werden die einzelnen Oktaven mit Hilfe des Nachbildungsfilters völlig gedämpft. Wegen der endlichen Flankensteilheit des Filters bedeutet das eine Erhöhung der mittleren Schalldämmzahl um etwa 4 dB (die planimetrische Bestimmung ergibt nämlich eine Verkleinerung des Energiepegels in einer Oktave um etwa 20 dB, also um 4 dB für den Gesamtbereich von 5 Oktaven), (Abb. 6). Die Ergebnisse sind der Abb. 14b zu entnehmen. Man vergleiche damit die in Abb. 14a eingetragenen Resultate aus der Gruppe (a) der 1. Versuchsreihe.

Wie erwartet, wird die Hördämmung nur wenig verbessert, und zwar maximal 1,5 dB für die Frequenzen 100...400 Hz, wenn mit dem Rauschen III getestet wird (dieses Geräusch enthält hauptsächlich tiefe Frequenzen). Das Maximum für das Rauschen I dagegen fällt wieder in das Gebiet hoher Frequenzen*.

* Dieser Befund überrascht deshalb, weil für alle anderen Oktaven derselbe Wert von 1 dB gefunden wird. Anhand des Geräuschspektrums kann man feststellen, daß dem Geräusch z. B. beim Fortfall der Oktave 3,2...6,4 kHz ein größerer Energiebetrag entzogen wird als beim Auslösen der Frequenzen von 6,4...10 kHz. Bei Berücksichtigung der diesen beiden Komponenten zukommenden Lautheiten tritt diese Diskrepanz noch stärker hervor. Eine Wiederholung des Tests ergab aber das gleiche Resultat.

Ein Urteil darüber, in welchem Umfang Abweichungen von der Sollkurve im günstigen und im ungünstigen Sinne einander kompensieren können, läßt sich durch die vorausgegangenen Tests noch nicht fällen. Wahrscheinlich wird eine solche Kompensation nur dann möglich sein, wenn die Verbesserung der Dämmung in jene Frequenzbereiche fällt, die maximal zur Gesamtlautstärke eines Geräusches beitragen.

Wie eingangs erwähnt, scheint die Einführung der Sollkurve im Hinblick auf die frequenz- und amplitudenabhängige Empfindlichkeit des Ohres berechtigt. Die mittlere Schalldämmzahl \bar{R} kann dieser Tatsache nicht Rechnung tragen. Wände mit gleichem \bar{R} können in ihrer Dämmgüte durchaus verschieden empfunden werden, je nach dem Frequenzbereich, in dem der Schwerpunkt der Dämmung liegt. Die Nachbildungsapparatur gestattet es nun, Wände mit beliebigen Dämmkurven, aber gleichen \bar{R} , auf ihre subjektive Wirkung hin zu untersuchen und in derselben Weise wie in den vorausgegangenen Versuchsreihen die Hördämmung zu bestimmen. Die Dämmkurven der in der 5. Versuchsreihe untersuchten Wände gibt Abb. 15 wieder. Die Dämmung zweier Wände steigt mit der Frequenz um 3 dB/Oktave bzw. 6 dB/Oktave an („ ω “-Wand bzw. „ ω^2 “-Wand). Viele der in der Praxis vorkommenden Wände lassen sich durch diese Typen in guter Näherung ersetzen. Ferner ist die „Sollwand“ vertreten und eine weitere künstliche Wand (Tiefpaßwand), die aber schwerlich realisiert werden dürfte (als Mehrfachwand vielleicht möglich). Sie hat aber den Vorteil, daß ihre Dämmkurve von den übrigen Kurven besonders stark abweicht und deshalb große Unterschiede zwischen mittlerer Schalldämmzahl und Hördämmung zu erwarten sind. Für alle vier Wände wurde die

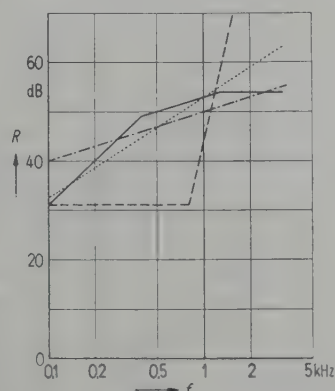


Abb. 15. Schalldämmkurven der in der fünften Versuchsreihe geprüften Wände; — „Sollwand“, --- „ ω -Wand“, ... „ ω^2 -Wand“, -.-.- „Tiefpaßwand“.

mittlere Schalldämmzahl der Sollkurve (48 dB) zugrunde gelegt.

Wie vorher wurden Tests mit den Geräuschen der Abb. 10 ausgeführt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle I zusammengestellt. Wenn also z. B. Sprache beim Test verwendet wird, muß das Originalgeräusch um 48 dB gedämpft werden, damit es ebenso laut ist wie der von der Sollwand durchgelassene Schall (anders ausgedrückt: die Sollwand dämmt ebenso gut wie eine frequenzunabhängig dämmende Wand mit $\bar{R} = 48$ dB).

Tabelle I
Hördämmungen der in der 5. Versuchsreihe geprüften Wände

Testgeräusch	Sollwand	ω -Wand	ω^2 -Wand	Tiefpaßwand
Sprache	48 dB	48 dB	48 dB	37 dB
Musik	49 dB	48 dB	48 dB	36 dB
Rauschen I	52 dB	52 dB	56 dB	48 dB
Rauschen II	48 dB	48 dB	48 dB	—
Rauschen III	—	46 dB	45 dB	—

Es ist zu erkennen, daß die drei Geräusche, Sprache, Musik und Rauschen II, ein einheitliches Verhalten bei allen Wänden zeigen. Bei ihrer Verwendung hat nicht nur jede Wand für sich dieselbe Hördämmung (abgesehen von der 1 dB-Differenz in zwei Fällen), sondern es ergibt sich auch, daß die Hördämmungen der drei erstgenannten Wände untereinander gleich sind. Der betreffende Wert von 48 dB ist der gleiche, den auch die mittlere Schalldämmzahl angibt.

Das Rauschen I dagegen liefert höhere Werte. Qualitativ kann man dieses Verhalten folgendermaßen erklären: Sprache, Musik und Rauschen II haben einander ähnliche Spektren. Ferner ist bei ihnen die Bedingung erfüllt, die in der Definition der mittleren Schalldämmzahl enthalten ist, daß nämlich die Schallenergie nach dem Wanddurchgang oberhalb 3,2 kHz so gering geworden ist, daß die Beiträge dieser Frequenzen zur Gesamtlautstärke vernachlässigbar klein sind. Daher ist eine Übereinstimmung von mittlerer Schalldämmzahl und Hördämmung möglich. Beim Rauschen I aber ist die erwähnte Bedingung nicht erfüllt.

Beim Test mit Rauschen III ist die Hördämmung geringer als den betreffenden Wänden ihrer mittleren Schalldämmzahl nach zukäme. Hier kommt die starke Dämmung bei hohen Frequenzen nicht zum Tragen, weil die Schallenergie auf ein verhältnismäßig schmales Band bei tiefen Frequenzen beschränkt ist.

Wie nicht anders zu erwarten, differieren bei der vierten Wand, die wie ein akustischer Tief-

paß mit der Grenzfrequenz 800 Hz dämmt, objektive und subjektive Dämmung erheblich. Die Hördämmung für Sprache und Musik ist gegenüber den anderen Wänden um 11...12 dB geringer geworden. Der Schwerpunkt der Dämmung liegt eben oberhalb 800 Hz und infolgedessen werden die Frequenzen von 200...800 Hz, die das meiste zur Lautstärke dieser Geräusche beitragen, nur schwach gedämmt.

Aus diesen Untersuchungen ergibt sich: Bei den üblichen Typen von Schalldämmkurven und Geräuschen nach Art von Sprache und Musik ist die Kennzeichnung der Schalldämmung durch eine Zahl möglich.

4. Untersuchungen über Trittschalldämmung

Die bisherigen Versuche befaßten sich nur mit der Dämmung von Luftschall. Das hierbei angewandte Meßverfahren, die Bestimmung einer „Hördämmung“, ist bei subjektiven Untersuchungen über Trittschall nicht brauchbar, denn es gibt kein „Originalgeräusch über der Decke“, das mit dem durchgelassenen Geräusch verglichen werden könnte. Zum subjektiven Vergleich steht nur der von einer Decke abgestrahlte Trittschall zur Verfügung. Man kann nun aber das zu einer bestimmten Decke gehörende Trittschallgeräusch als Bezugsgröße ansehen und damit die durch Veränderung der Deckendämmung entstehenden Geräusche vergleichen.

Auf diese Weise läßt sich die Wirkung von Abweichungen von der Trittschallsollkurve untersuchen. Das schon erwähnte Rauschen III besitzt ein Frequenzspektrum, wie es etwa bei Abstrahlung des Trittschalls von der Solldecke zu erwarten ist (verursacht z. B. durch Verrücken eines schweren Tisches auf der Decke). Die mit diesem Rauschen durchgeführten Versuche, die bereits bei der Luftschalldämmung beschrieben worden sind (siehe Versuchsreihen 1(a) und 4) lassen sich jetzt folgendermaßen deuten: durch Erhöhung des Trittschallpegels in einer Oktave um 10 dB wird eine mittlere Abweichung von der Sollkurve um 2 dB im ungünstigen Sinne realisiert. Nach Abb. 14 a sind solche Erhöhungen besonders bei tiefen Frequenzen bemerkbar (2,5 dB bei 100...200 Hz). Im Mittel stimmen subjektive und objektive Abweichung überein. Demgegenüber werden Absenkungen des Trittschallpegels von 20 dB/Oktave, was eine mittlere Abweichung von 4 dB im günstigen Sinne bedeutet, geringer empfunden (maximal 1,5 dB bei 100...400 Hz, siehe Abb. 14 b).

In einem weiteren Versuch wurde die subjektive Wirkung von Trittschallverbesserungen an

einer Hohlkörperdecke durch verschiedenartige Estriche untersucht. In Abb. 16 sind die Normtrittschallpegel dieser Deckenkonstruktionen in Abhängigkeit von der Frequenz aufgezeichnet, wie sie von GÖSELE [6] mit dem Normhammerwerk gemessen wurden. Zusätzlich ist die Sollkurve eingezeichnet. Die Kurven im unteren Teil der Abb. 16 stellen die entsprechenden Trittschallverbesserungen gegenüber der Rohdecke dar.

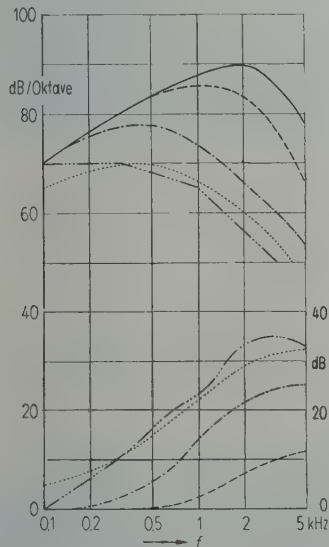


Abb. 16. Normtrittschallpegel einer Hohlkörperdecke und Verbesserung durch Estriche (nach GÖSELE [6]).
— Rohdecke,
----- Rohdecke, Estrich auf Sandschüttung,
..... Rohdecke, Estrich auf Weichfaserplatte,
- · - · - Rohdecke, Estrich auf Mineralwolleplatte,
- - - - - „Solldecke“.
Die Kurven im unteren Teil der Abbildung stellen die Trittschallverbesserung dar.

Als Testgeräusch werden diesmal an Stelle von Rauschen Impulse benutzt (Impulsfrequenz etwa 5 Hz), deren Spektrum dem Normtrittschallpegel der Rohdecke entspricht (ausgezogene Kurve in Abb. 16), deren Gesamtpegel aber im Test um etwa 30 dB gesenkt wurde, um eine bessere Annäherung an die in der Praxis vorkommenden Geräusche zu erhalten (z. B. Geh- Geräusche). Im Test wird festgestellt, um welchen

Betrag dieses Geräusch gedämpft werden muß, damit es die gleiche Lautstärke hat wie die durch die Verbesserung entstehenden Geräusche. Diese „subjektiven Verbesserungen“ sind zusammen mit den mittleren objektiven Verbesserungen, die aus den unteren Kurven der Abb. 16 errechnet wurden, in Tabelle II dargestellt.

Tabelle II
Subjektive und objektive Trittschallverbesserung

	subjektive Verbesserung	mittlere objektive Verbesserung
Sandschüttung	5 dB	2 dB
Weichfaserplatte	15 dB	9 dB
Mineralwolleplatte	26 dB	17 dB
Solldecke	28 dB	18 dB

Dem subjektiven Eindruck nach haben also diese Estriche eine bessere Dämmwirkung als sich aus der objektiven Auswertung ergibt. Das liegt sicher daran, daß diese Estriche insbesondere die hohen Frequenzen dämmen, die die maximalen Beiträge zur subjektiven Lautstärke des Rohdeckengeräusches liefern.

Herrn Prof. Dr. E. MEYER danke ich für die Aufgabenstellung und für zahlreiche wertvolle Ratschläge. Mein Dank gilt ferner Herrn Dr. K. TAMM, dessen Beratung den Bau des Filters wesentlich förderte, sowie den Institutsmitgliedern, die sich freundlicherweise an den Hörtests beteiligten.

Die Mittel zur Durchführung der Arbeit stellte das Bundesministerium für Wohnungsbau zur Verfügung.
(Eingegangen am 10. Juli 1954.)

Schrifttum

[1] FELDKELLER, R., Einführung in die Siebschaltungstheorie. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1950.
[2] SCHOCH, A., Die physikalischen und technischen Grundlagen der Schalldämmung im Bauwesen. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1937.
[3] HIRSH, I. J., The measurement of hearing. McGraw-Hill Book Co., New York 1952.
[4] CAPEK, J., Die Schalldämmung von Wänden gegenüber Sprache und Musik. Akust. Z. 7 [1942], 152.
[5] Deutsche Normen, DIN 52211.
[6] GÖSELE, K., Berichte Forschungsgemeinschaft Bauen und Wohnen 9 [1950], 33.

A STUDY OF ACOUSTIC 'STREAMING' IN LIQUIDS OVER A WIDE FREQUENCY RANGE

by A. M. GHABRIAL and E. G. RICHARDSON

King's College, Newcastle upon Tyne

Summary

An experimental study is made of the streaming in liquids from vibrating bodies from infrasonic to ultrasonic frequencies. It appears that the general form of the streams is the same at all frequencies and satisfies a formula due to RAYLEIGH. In certain liquids at higher frequencies there is additional streaming, which is related to radiation pressure and the high attenuation of the sound waves. Possible causes of this high attenuation are discussed.

Sommaire

On a étudié expérimentalement les courants produits dans des liquides par des corps immergés qui vibrent à des fréquences s'étendant de la gamme des infrasons à celle des ultrasons. On a constaté que la forme générale de ces courants est la même pour toutes les fréquences et correspond à une formule établie par RAYLEIGH. Dans certains liquides et pour des fréquences élevées, il se produit, en plus, un courant associé à la pression de rayonnement, et un grand affaiblissement des ondes sonores. On examine les causes possibles de ce grand affaiblissement.

Zusammenfassung

Die von schwingenden Körpern ausgehende Flüssigkeitsströmung wurde in einem großen Frequenzbereich, von unterhalb des Hörbereichs bis zu Ultraschallfrequenzen, experimentell untersucht. Es ergab sich, daß die allgemeine Form der Strömung bei allen Frequenzen gleich ist und einer von RAYLEIGH angegebenen Formel gehorcht. In bestimmten Flüssigkeiten tritt bei höheren Frequenzen eine zusätzliche Strömung auf, die auf den Schallstrahlungsdruck und die starke Dämpfung der Schallwellen zurückgeführt wird. Mögliche Ursachen für diese Dämpfung werden diskutiert.

1. Introduction

The study of the steady flow of fluid in the confined space in the neighbourhood of a vibrating body or in a tube irradiated by stationary sound waves began with FARADAY [1], was continued by DVORAK [2] and, apart from the experiments of ANDRADE [3], was more or less forgotten in this century until the 'quartz wind', observed in the vicinity of ultrasonic sources, again directed attention to it. It has now a considerable bibliography which will not be reproduced in full here, since it can readily be constructed from references given in a number of recent papers, some of which we shall cite later. A number of these proffer refinements in the theory of the propagation of plane waves in tubes, but insofar as possible absorption of the sound is neglected, do not alter the basic proof of RAYLEIGH [4] i. e. that when second order terms in the equations of propagation of the waves are retained a component in the velocity potential arises which is independent of time.

The phenomenon has close relations with radiation pressure and with the 'annular effect' discovered by one of the present authors [5]. Since ECKART [6] put forward a theory relating to the second coefficient of viscosity, considered

—albeit for a moment only—by STOKES in relation to a quite different phenomenon, there has been quite a controversy (for the starting of which, one of the present authors [7] must hold himself responsible) on the relationship between the modern ultrasonic streaming and the older low-frequency one. It was the purpose of this research to try to throw some light on this relationship by making an experimental study of acoustic streaming over the whole gamut from infra to ultrasonic frequencies.

2. Apparatus

For the infrasonic and lower sonic range steel reeds, electrically maintained in vibration, dipped under a liquid the surface of which had light particles scattered over it. A photograph under time exposure of about a minute then showed the streaming, velocities being capable of estimation from the lengths of streaks. Fig. 1 for example is of a reed of width 3 mm vibrating at 4 c/s at the centre of a circular trough 12 cm diameter containing water showing the characteristic four vortices due to inflow to the centre in a direction perpendicular to the axis of vibration and outflow along the axis.



Fig. 1. Vibrating reed (4 c/s) dipping into circular trough containing water.

When the reed vibrates at sonic frequency in the centre and along the axis of a channel, the vortices are contracted by the walls and the streaming out parallel to these with return along the walls then becomes obvious. See Fig. 2 which is of a reed of 8 mm diameter vibrating at 330 c/s in a channel 50 mm wide.



Fig. 2. Reed vibrating (at 330 c/s) along axis of canal.

For studying the streams in the body of a liquid, vibrating reeds and an 'underwater loud-speaker' (on loan from the Admiralty Research Laboratory) were used up to 4 kc/s, but for measuring the velocity of the streams, a "thermistor" (semi-conductor element) heated by a small current was employed. By traversing the thermistor through the liquid in question at various speeds, a relationship between change of electrical resistance and velocity had been established in an earlier experiment.



Fig. 3. Thermistor on fork used for measuring streams.

The blob and leads of such an element are so fine that, mounted on a fork, they offer little obstruction to the flow at the point where the velocity is to be measured (Fig. 3).

It is true, of course, that this 'anemometer' is also sensitive to alternating flow and therefore to sound amplitude, but at the frequencies concerned and with the bridge used, the effect due to this cause was negligible in comparison to that of the direct velocity.

Next in order of frequency were two nickel rod sources, of 7 and 14 kc/s respectively, maintained by magnetostriction. The power available was such that they could be used up to cavitation speeds.

Finally, a selection of quartz discs in piezoelectric oscillation of frequencies between 1/4 and 6 Mc/s were available; Fig. 4 shows the streaming from a 2.5 cm diameter quartz radiating at 5 Mc/s into benzene in a 5 cm tube.



Fig. 4. Quartz vibrating (at 5 Mc/s) along axis of benzene filled tube.

In all experiments, careful control over the temperature enclosing the vessel in a thermostat had to be maintained.

Apart from the streaming velocity and the geometry of the apparatus, two quantities relevant to the source must be measured, i. e. frequency and amplitude. The former presents little difficulty but the latter is difficult to measure except for the reeds at low infrasonic frequencies for which a microscope suffices. Nevertheless, we considered it important to measure the amplitude directly at the source and not to infer it from measurements *in the liquid*, e.g. of radiation pressure on suspended discs as some have done, since these discs are bound to be affected also by the streaming.

Three devices have been used at higher frequencies (1) the vibration detector of YOUSEF and SULTAN [8], (2) the 'chattering method' of BRAGG [9], (3) measurement of crystal impedance, in the case of the vibrating quartz.

The vibration detector is essentially an electrostatic circuit for measuring the varying capacitance between the end of the reed or nickel rod and a nearby plate as the former oscillates, and its use is, of course, confined to non-conducting fluid media.

In the chattering method, used on the nickel rods, a reed fixed to a heavy mass at one end with its other end touching the vibrating body has the fixed end moved in until the free end is no longer thrown off and the amplitude of the body calculated from the shift necessary to be given to the heavy mass to accomplish this.

Both these methods, then, require a *point d'appui* not easy to provide in a tank of liquid.

Method (3) requires the measurement of the voltage (V) across the radiation resistance (R_1) of the network equivalent to the crystal of surface A . If ρc is the characteristic impedance of the irradiated fluid, ξ the amplitude of vibration, the intensity of vibration in the fluid at the source

$$I_0 = \frac{1}{2} \rho c \xi^2.$$

Usually the voltage is measured across the crystal, i. e. across R_1 and R_2 at resonance, from which that over R_1 must be derived.

Let L_s , R_s , C_s , (Fig. 5a) represent a secondary circuit loosely coupled to a stable oscillator, and R_p , C_m represent the equivalent electrical network of the crystal connected across the condenser C_s ; C_0 is the static capacitance between the two faces of the crystal.

Effectively the electrical network given could be replaced by the effective electrical network

of Fig. 5b in which a constant driving force $E \sin \omega t$ is applied in series with the circuit. C replaces C_s , C_0 and C_m in parallel.

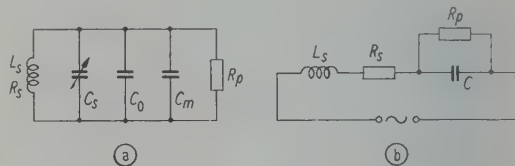


Fig. 5. Equivalent electric networks for calculating quartz resistance.

The potential difference across R_p , C at any setting of C being written

$$V = \frac{i}{G + j\omega C} \quad (1)$$

where G stands for the conductance of the crystal, the current i is given by

$$i = \frac{E}{R_s + j\omega L_s + (G + j\omega C)^{-1}} \quad (2)$$

so that

$$V = \frac{E}{R_s + j\omega L_s} \left[G + \frac{R_s}{Z^2} + j\omega \left(C - \frac{L_s}{Z^2} \right) \right]^{-1} \quad (3)$$

where

$$Z^2 = R_s^2 + \omega^2 L_s^2.$$

At voltage resonance, $C = L_s/Z^2$ and the resonance voltage V_0 will be given by:

$$E/V_0 = (R_s + j\omega L_s)(G + R_s/Z^2). \quad (4)$$

The ratio between the voltages across the condenser at resonance and that away from resonance has amplitude given by

$$\left| \frac{V_0}{V} \right|^2 - 1 = \omega^2 \left(\frac{C - L_s/Z^2}{G + R_s/Z^2} \right) = S^2, \text{ say.} \quad (5)$$

The values of the capacitance required to give the same voltage on the two sides of resonance are given by

$$C = \frac{L_s}{Z^2} \pm \frac{G + R_s/Z^2}{\omega}. \quad (6)$$

If C_1 and C'_1 are the roots of this equation, the conductance of the circuit can be expressed as

$$G = \frac{R_s}{Z^2} = \frac{\omega}{2S} (C_1 - C'_1) \quad (7)$$

which can be used to calculate the total inductance of the secondary circuit from the measurement of the difference between these capacitances.

The apparatus used to measure the resistance of the crystal (X) is shown in Fig. 6. A coil L_s is coupled to the output of the amplifier AB by link

coupling coils L , L composed of few turns depending on the frequency used. The coils L , L and the calibrated condenser C are well shielded in an aluminium box to control any stray capacitance. The voltage across C_s is measured by a shielded slide-back valve voltmeter V .

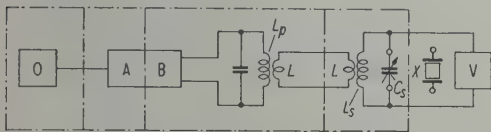


Fig. 6. Circuit of apparatus for measuring crystal resistance.

The condenser C_s is an air condenser calibrated by Marconi Q factor meter to read change of capacitance of the order of 0.1 pF.

In this work, there is no need to measure absolute voltages across the condenser. Therefore, the grid voltage required to cancel the plate current is taken as a measure of that voltage.

The sound energy is the same as the electrical energy dissipated in the radiation resistance of the crystal. The latter is proportional to the total electrical energy in the crystal circuit for the same crystal and mountings.

An indirectly heated thermistor is used as indicator for the sound energy. The indirectly heated thermistor type B consists of 100 ohm heater whose resistance is independent on the heating current. The temperature-sensitive element of a thermistor is fixed near the heater so that all the heat generated by an electric current passing through the heater is focussed onto the thermistor element.

In operation the measuring circuit is tuned to resonance by varying the standard condenser C and the potential difference across the condenser is measured by the slide-back valve voltmeter previously described. Next the standard capacitance is changed round its resonance value and the corresponding potential difference across the condenser is recorded. A graph is built up between the capacitance and the voltage. A horizontal line cutting that resonance relation will give two values of the capacitance C_2 , C'_2 on both sides of the resonant value V_{02} . From the knowledge of these quantities the conductance of the measuring circuit is calculated from Eq. (7).

This conductance includes the conductance of the coil as well as the conductance of condenser and leads.

The crystal is now connected across the standard condenser and the previous step is repeated giving the corresponding values C_1 , C'_1 and V_{01} respectively.

The conductance of the combination in this case will be the sum of the conductances of the crystal and that of the measuring circuit as given by (7);

$$G + \text{conductance} = \frac{\omega}{2 S_2} (C_2 - C'_2). \quad (8)$$

Subtracting (8) from (7) we are left with an expression for the conductance of the crystal at a certain frequency given by

$$G = \frac{\omega}{2} \left(\frac{C_1 - C'_1}{S_1} - \frac{C_2 - C'_2}{S_2} \right). \quad (9)$$

The frequency of the oscillator is now changed to another value near the resonant frequency of the crystal and the previous routine to find the conductance of the crystal is followed.

A graph set up between the crystal conductance and the frequency will have a maximum G which is equal to $1/R$.

A value for the resistance of the crystal in vacuum is also required. This was deduced from a series of measurements in air at gradually reduced pressure. This gives R_2 ; R_1 is found by subtraction. Typical values of the radiation resistance into different liquids are given in Table I.

Table I

The radiation resistance of the crystals radiating into different liquids in kΩ

Liquid	Frequency in Mc/s						
	0.25	0.5	1	2	4	5	6
Amyl-alcohol	400	120	30	10	1.8	1.2	1.0
Water	600	190	50	15	3.75	2.0	1.4
Olive oil	550	160	45	13	2.55	1.6	1.2
Toluene	450	140	40	11.5	2.25	1.5	1.1
Carbon tetrachloride	600	187	38	14	3	1.7	1.3
Benzene	450	140	36	11	2.1	1.5	1.5

3. Results

As long as the intensity of the source and consequent power transmitted to the liquid is not great enough to produce turbulence or cavitation the velocity of streaming (measured at 1 cm in line ahead of the source) is proportional to the sound intensity. Fig. 7 shows for the reeds in the parallel sided canal how the specific velocity of streaming, i. e. the velocity per unit intensity, depends upon the frequency and the width of the source.

At a fixed value of this width, the streaming in various organic liquids and mixtures of glycerine and water at 25°C is inversely as the viscosity η

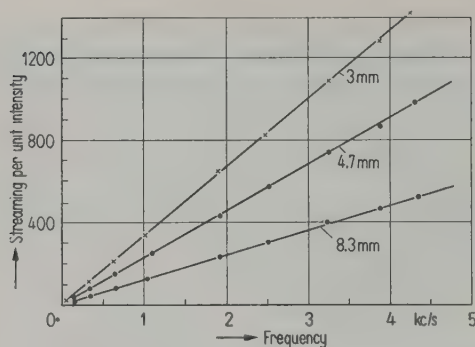


Fig. 7. Streaming per unit intensity for reeds of various widths in a trough 2 cm wide plotted against frequency.

(Fig. 8); indeed, in pure glycerine we found it impossible to set up streams away from the attached vortices.

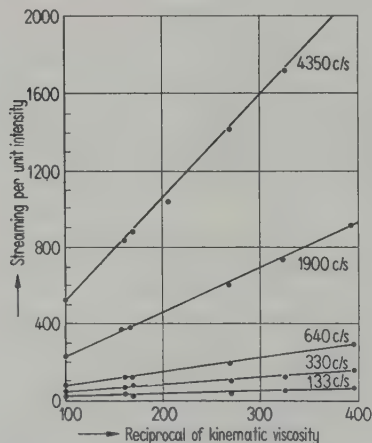


Fig. 8. Streaming at various frequencies in liquids of different kinematic viscosities.

Fig. 8 also shows the increase of streaming in direct proportion with frequency. The theory (*vide infra*) demands that the streaming shall be a function of a parameter $l^2\omega/\nu$ where l is a linear dimension of the motion, e.g. the boundary layer thickness or the amplitude of vibration.

We also observed the inner vortices, rotating in opposite sense to the outer large ones at low values of this parameter. SCHLICHTING [10] first described these in relation to a cylinder and they have been very nicely established (in a gaseous régime) in the recent investigation of HOLTZMARK et al [11].

As the sense of rotation of the inner set is opposed to that of the outer set there may be a reversal of the direction of flow at a point near to, and on the axis of vibration of, the vibrator as the intensity is increased.

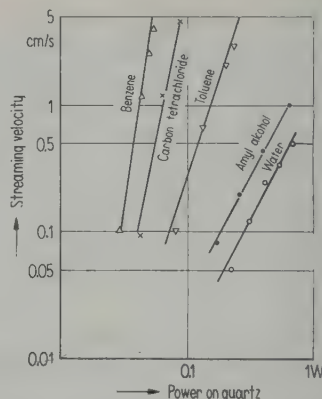


Fig. 9. Streaming at 5 Mc/s in five liquids.

When we come to consider results in the kilocycle range the effect of absorption of the radiation in the liquid on the streams becomes apparent.

Fig. 9 shows that for a given power applied to a quartz of 5 Mc/s, the liquids toluene, carbon tetrachloride and benzene have much greater streaming velocities for a given electrical power applied to the quartz than their location according to their kinematic viscosities on a graph such as Fig. 8 would warrant. This is shown again on Figs. 10 and 11 where the variations with frequency and temperature are brought out. All these liquids have about the same kinematic viscosity, except olive oil which falls in its 'proper' place below water.

The other important point about these results—better shown in Fig. 12—is that in the mega-

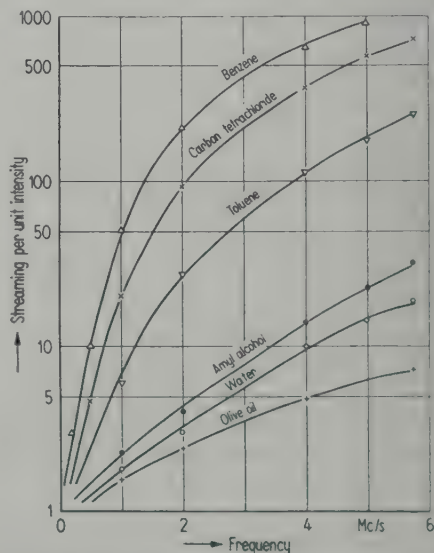


Fig. 10. Streaming per unit intensity for ultrasonic sources in six liquids.

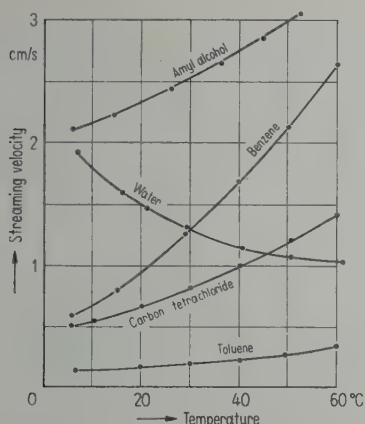


Fig. 11. Streaming at 5 Mc/s in five liquids as function of temperature. (N. B. The velocities in water and amyl alcohol are exaggerated tenfold in relation to the others.)

cycle range the streaming per unit intensity is proportional to the square of the frequency and (nearly) to the respective ultrasonic absorption coefficients obtained for these liquids by pulse or reverberation methods.

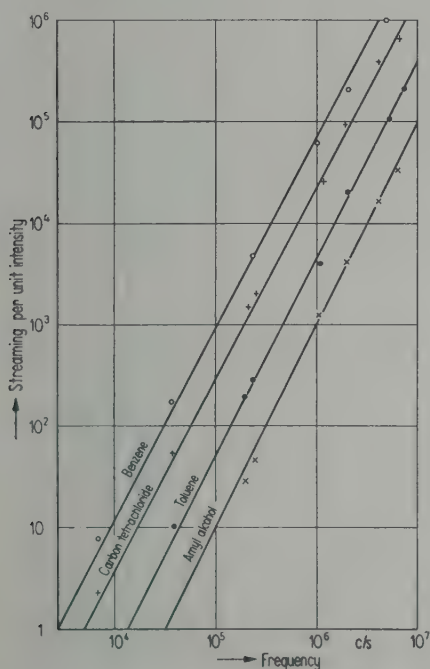


Fig. 12. Streaming in four liquids plotted against frequency in log-log form.

4. Discussion of results

The main conclusion to be drawn from these experiments would appear to be that there is

nothing essentially different in the form of the streams at sonic—or even infrasonic—and ultrasonic frequencies (cf. the photographs Figs. 2 and 4 with those of ANDRADE [3] in Kundt's tube).

When plane waves in tubes, unattenuated in amplitude by either molecular absorption, divergence or scattering, are concerned, the theory which RAYLEIGH [4] evolved from the Navier-Stokes equations in an important paper (which was probably the first use of the concept of the 'boundary layer' which has been so fruitful in other fields), is adequate to predict the streaming velocity in the general case, though RAYLEIGH was thinking of the 'circulations' that DVORAK [2] observed between nodes and antinodes in Kundt's tube.

Our results as to the relative width of outward and return circuit in the stream, and intensity of source (Fig. 7), frequency and viscosity of liquid (Fig. 8), are in agreement with theory [4], [10], [11].

When we turn to the ultrasonic results, however, we find that the *magnitude* of the streams in the highly absorbent liquids, viz. benzene, carbon tetrachloride and toluene, is much in excess of that in a liquid like water or the alcohols, which have about the same viscosity (Figs. 9 and 10).

FOX and HERZFELD [12] suggested—following we believe, an idea of CADY's—that the excess of streaming momentum balances the force exerted in unit time due to radiation of intensity I_x , on an element of volume in the path of the waves which has therefore to be measured in terms of $\alpha I_x \delta x / c$ per unit area of cross-section of the beam, α being the absorption coefficient and c the velocity of the wave. Some have equated this to the force due to the shearing action of the outward on the return current or of the latter on the retaining walls, in the form $\eta \partial v / \partial y$ where η is the coefficient of shear viscosity, and $\partial v / \partial y$ the normal gradient of streaming (though the latter has never been actually measured) and deduce that v should be proportional to $\alpha \eta / c$.

In the ultrasonic gamut where this effect far outweighs hydrodynamic streaming indeed our results would plot against this parameter as Fig. 12 shows, but since the variation of η among these three liquids is not large it can hardly be considered as proven that η should intervene.

It might be more reasonable to consider that the energy emitted by the source is expended partly in viscous shear and partly in absorption as radiation pressure in the liquid. Only thus is it possible to explain the behaviour of glycerine,

amyl alcohol and olive oil which have absorption coefficients equal to the Kirchhoff value ($\frac{2}{3} \nu \omega^2 / c^3$) and large values of η withal, yet do not show the excessive ultrasonic streaming that their value of the product $\eta \alpha$ would indicate (Fig. 10).

There seems no doubt, however, that 'radiation pressure' streaming is correctly to be described in terms of α/c for when we increased the temperature of the liquid we found (Fig. 11) that v increased in the 'anomalous liquids' as does α but decreased in water and (slightly) in methyl alcohol. Now water is distinguished from the other liquids in that the velocity of sound in it increases as its temperature rises. When this factor is allowed for its behaviour falls in line with that of the others.

It has been suggested that measurements of streaming velocity might, in train with this proven relationship to wave attenuation, be used to derive values of absorption coefficient in those frequency regions wherein, owing to the low value of the coefficient, measurements by direct experiments are difficult. It was to study this possibility that the magnetostriction oscillators of 7 and 14 kc/s respectively were used in the 'anomalous' liquids. At these frequencies hydrodynamic streaming is paramount but an excess of streaming velocity over that for similar conditions in water was looked for. It was indeed observed that greater streaming occurred in carbon tetrachloride and in benzene than in water and it was by interpolating this excess that the points on Fig. 12 were obtained. Of course, it is true that water absorbs sound somewhat at these frequencies, but values for the coefficient are known from measurements in lakes, so that, for these purposes, it forms a good standard of reference.

5. Possible mechanisms of the absorption in the anomalous liquids

In an endeavour to discover how far the acoustic energy dissipated in these liquids passes directly into heat, measurements have been made of the temperature rise produced in them during irradiation by ultrasonics. It soon became apparent that no abnormal heating was produced in the liquids with large sound absorption and this has since been confirmed by DUTTA and SAMAL [13].

There are admitted complications in such experiments because of variations in dielectric constant, thermal conductivity and specific acoustic impedance among the liquids, but these variations are not great, and in the case of carbon tetrachloride there should be no difficulty in detecting a possible thousandfold rate of temperature rise above that to be expected from the value of its shear viscosity.

One notes that these three liquids have in common a high vapour pressure at ordinary temperature and can therefore the more readily cavitate. This may be the common feature which leads to high streaming velocities in all of them. Inserting the known vapour pressures, one obtains the following cavitation numbers (at a pitot head of one atmosphere) for liquids known to have high absorption; benzene 0.89, carbon tetrachloride 0.88, carbon disulphide 0.62, acetone 0.74, toluene 0.95, ethyl acetate 0.90.

One can indeed see cavitation nuclei forming in the first four when submitted to ultrasonic sources of sufficient power to produce streaming. On the contrary, we have not been able to induce streams in glycerine, not even with some water added, at the highest acoustic power we have been able to dispose of. One must conclude therefore that the excess of ultrasonic energy absorbed in the four special liquids must be dissipated in the kinetic energy of the turbulent streaming and in forming cavities or local domains of low density, as LUCAS [14] first envisaged in this connexion, instead of going directly into heat.

(Received 2nd November 1954.)

References

- [1] FARADAY, M., *Philos. Trans.* **121** [1831], 229.
- [2] DVORAK, V., *Ann. Phys. Lpz.* **157** [1875], 42.
- [3] ANDRADE, E. N. da, *C. Proc. roy. Soc. A* **34** [1931], 445.
- [4] RAYLEIGH, Lord, *Philos. Trans.* **175** [1883], 1.
- [5] RICHARDSON, E. G., *Proc. phys. Soc.* **40** [1928], 206.
- [6] ECKART, C., *Phys. Rev.* **73** [1948], 68.
- [7] RICHARDSON, E. G., *Colloquium over ultra-sonore trillingen*. Brussels 1951, p. 25.
- [8] YOUSEF, Y. L. and SULTAN, F., *Rev. sci. Instrum.* **20** [1949], 533.
- [9] BRAGG, Sir. W. H., *J. sci. Instrum.* **6** [1929], 196.
- [10] SCHLICHTING, H., *Phys. Z.* **33** [1933], 327.
- [11] HOLTZMARK, J., JOHNSEN, I., SIKKELAND, T., and SKAVLEM, S., *J. acoust. Soc. Amer.* **26** [1954], 26.
- [12] FOX, F. and HERZFELD, K. T., *Phys. Rev.* **78** [1950], 156.
- [13] DUTTA, A. K. and SAMAL, K. *Nature* **174** [1954], 976.
- [14] LUCAS, R., *J. Phys.* **8** [1937], 41.

DIE LEITUNG VON SCHALLIMPULSEN IN METALLSTÄBEN

von W. GÜTH

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Es wird mittels der Integrationsmethode der stationären Phase die Theorie der Ausbreitung von Impulsen und ihnen verwandten Schallvorgängen in dispergierenden Medien am Beispiel eines runden Metallstabes entwickelt. Die Ergebnisse werden mit Meßwerten verglichen, die durch die Auswertung von Schlierenaufnahmen gewonnen wurden. Der Schluß enthält einen Hinweis auf die Möglichkeit einer Anwendung der hier gewonnenen Ergebnisse auf das Problem der Riffelbildung auf Eisenbahnschienen.

Summary

By means of the integration method of "stationary phase" a theory of the propagation of impulses and similar sounds in a dispersive medium is developed and demonstrated on a circular metal cylinder. The theory is compared with experimental data obtained by schlieren methods. The possible use of these results to explain the formation of ripples on steel rails is discussed.

Sommaire

Par application de la méthode d'intégration de la phase stationnaire, on a établi, en prenant comme exemple le cas d'un barreau métallique de section circulaire, la théorie de la propagation d'impulsions dans un milieu dispersif, et des phénomènes sonores associés. On compare les résultats fournis par cette théorie avec les résultats expérimentaux obtenus par le dépouillement des striogrammes. D'après les conclusions auxquelles on est arrivé, il est possible d'appliquer les résultats obtenus ici au problème de la formation de cannelures sur les rails de chemin de fer.

Einleitung

Die Ausbreitung monochromatischer Schallwellen in Metallstäben ist schon seit langem Gegenstand vielfacher Untersuchungen theoretischer wie auch experimenteller Art.

Berechnungen der Dispersionseigenschaften zylindrischer Stäbe für die Wellen niederster Ordnung geben im Anschluß an früher erschienene Arbeiten [1], [2] BANCROFT [3] und HUDSON [4] an. Meßergebnisse zur Dispersion in zylindrischen Stäben verschiedener Materialien werden von CZERLINSKY [5] und für rechteckige Stäbe von MORSE [6] mitgeteilt. HÜTER [7] mißt unter anderem auch Dispersionsäste höherer Ordnung aus. Umfangreiche Untersuchungen über die Ausbreitung von Detonationswellen in Stäben stellte DAVIES [8] an. Er benutzte runde Metallstäbe, an deren einem Ende die Detonationsladung, am anderen mit einem Oszillographen gekoppelte Mikrophone angebracht waren.

Während sich alle genannten Arbeiten, mit Ausnahme der von DAVIES, mit der Ausbreitung monochromatischer Wellen befassen, soll hier die Ausbreitung von Stoßwellen, also impulsartigen Schallvorgängen¹, behandelt werden. Die

Formulierung des Problems lautet demnach: In welcher Form und mit welcher Geschwindigkeit pflanzt sich ein am einen Ende eines Stabes angeregter Impuls unter Berücksichtigung der Dispersionseigenschaften in der Richtung der Stabachse fort?

1. Theoretische Behandlung

Das Verhalten eines elastischen Mediums wird in allgemeiner Form beschrieben durch die dynamische Grundgleichung²

$$\varrho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = (\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} + \mu \Delta \vec{s}. \quad (1)$$

Darin sind λ und μ die Laméschen Konstanten, ϱ die Dichte des Materials und \vec{s} der Auslenkungsvektor.

Wendet man diese Gleichung auf den zylindrischen Stab an und berücksichtigt die Spannungsfreiheit auf der Staboberfläche, so gewinnt man mit dem Ansatz $\vec{s} = \vec{s}_0 \exp i(kx - \omega t)$ — die x -Achse liege in der Längsrichtung des Stabes — die Dispersionsgleichungen für die verschiedenen Wellentypen, d. h. man erhält die Kreisfrequenz ω als Funktion der Wellenzahl k , bzw. die Phasengeschwindigkeit c_{ph} in der x -Richtung als Funktion der Wellenlänge λ .

¹ Wie sich die im folgenden angegebene Behandlungsmethode über die Impulse hinaus auch auf Schallvorgänge mit langsam veränderlicher Spektralfunktion erweitern läßt, wird im weiteren noch näher ausgeführt.

² Eine Zusammenstellung der verwendeten Zeichen befindet sich am Schluß der Arbeit.

In Abb. 1 sind die Dispersionskurven für die Wellen niederster Ordnung in den dimensionslosen Koordinaten a/λ und c_{ph}/c_0 gezeichnet. a ist der Stabradius und c_0 die Dehngeschwindigkeit. Die Kurve D bezeichnet die symmetrische Wellenform. Für kleine a/λ wird ihre Phasengeschwindigkeit gleich der der Dehnwelle c_0 , für große a/λ geht sie in die der Oberflächenwelle c_r über. Die Kurve B zeigt den Dispersionsverlauf der schiefsymmetrischen Form. Sie wird im Falle kleiner a/λ Biegewelle genannt, und ihre Phasengeschwindigkeit wird für große a/λ ebenfalls gleich der der Oberflächenwelle. Diese beiden Wellenarten niederster Ordnung, die im folgenden zunächst allein betrachtet werden, seien einfach Dehnwelle und Biegewelle genannt.

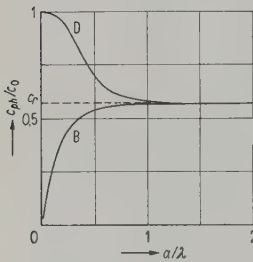


Abb. 1. Dispersionskurven für die Dehnwelle (D) und die Biegewelle (B) im runden Stab ($\sigma = 0,29$). Der Wert bei c_r entspricht der Geschwindigkeit der RAYLEIGHschen Oberflächenwellen.

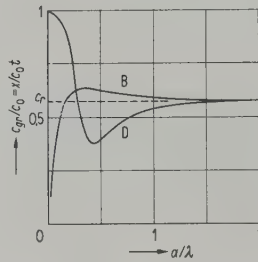


Abb. 2. Die der Phasengeschwindigkeit in Abb. 1 entsprechende Gruppengeschwindigkeit.

Die den Phasengeschwindigkeiten c_{ph} in Abb. 1 entsprechenden Gruppengeschwindigkeiten c_{gr} für die Dehn- und Biegewelle sind in Abb. 2 dargestellt.

Wie wird man sich nun bei einem solchen Verlauf der Dispersionskurven die Ausbreitung einer Stoßwelle in der Richtung der Stabachse vorzustellen haben?

Der Impuls, der ja als eine geeignete Überlagerung monochromatischer Wellen darstellbar ist, wird sich auf zweierlei Weise fortbewegen, als Dehn- und als Biegewellengruppe. Dabei werden wegen der Dispersion die langen Wellen der ersten schneller laufen als die kürzeren, so daß der Impuls zu einem Wellenzug auseinandergezogen wird, derart, daß vorn, mit der Geschwindigkeit c_0 , die unendlich langen Wellen und in deren Gefolge die kürzeren laufen. Bei den Biegewellen wird es umgekehrt sein; hier eilen die kürzeren Wellen den längeren voraus.

Quantitativ kann die Erscheinung auf die folgende Weise beschrieben werden:

Läßt sich die Lösung der Gl. (1) in der Form $\varphi(x, t) = \exp[ikx - \omega(k)t]$ schreiben, so kann man solche Lösungen auch in der Gestalt eines Fourier-Integrals superponieren:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) \exp[ikx - \omega(k)t] dk$$

mit der Spektralfunktion

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp[ik\xi] d\xi,$$

falls nur die Anregungsfunktion $f(\xi)$ einen im physikalischen Sinne vernünftigen Verlauf hat. Kombiniert geben beide Formeln:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp[ik(x - \xi) - \omega(k)t] d\xi dk. \quad (2)$$

(In der Bezeichnung $\omega(k)$ ist die Dispersions-eigenschaft des Stabes angedeutet.)

In der Regel wird nun die funktionale Beziehung $\omega(k)$ so kompliziert sein, daß das Integral (2) sich nicht elementar lösen läßt, und ein Blick auf Abb. (1) zeigt, daß dieser Fall hier gegeben ist. Man muß sich mit Näherungen helfen, oder versuchen, die Integration auf Teilgebiete zu beschränken, die im wesentlichen den Inhalt der Formel (2) wiederzugeben vermögen.

Das Letztere gelingt nach einem Verfahren, das erstmalig von LORD KELVIN bei der Behandlung eines Problems aus der Optik angewandt wurde, und das unter dem Namen „Sattelpunkts-methode“ bzw. „Methode der stationären Phase“ bekannt ist. Sie sei im folgenden gleich an Hand des vorliegenden Beispiels (Gl. (2)) erläutert.

Zunächst wird die Integration nach ξ auf elementare Weise ausgeführt. Die Anregungsfunktion $f(\xi)$ könnte man zunächst, dem hier vorgelegten Problem entsprechend, durch einen Impuls, dessen Spektralfunktion $g(k)$ eine Konstante ist, ersetzen. Sie soll aber, da das den hier gegebenen Versuchsbedingungen nur schlecht entspräche, durch die Funktion $f(\xi) = \exp(-b\xi^2)$ gegeben sein. Aus Gl. (2) wird damit

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-b\xi^2 + i[k(x - \xi) - \omega(k)t]\} d\xi dk$$

und die Integration nach ξ ergibt³:

³ Text der Fußnote auf S. 37.

$$q(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi b}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{k^2}{4b} + i[kx - \omega(k)t] \right\} dk \quad (3)$$

Für die Integration nach k macht man sich nun die Tatsache zunutze, daß dabei fast alle im Spektrum von $f(\xi)$ enthaltenen Wellen durch Interferenz ausgelöscht werden bis auf diejenigen, bei denen die Phase stationär wird, d. h. bei denen die Phasenfunktion $\Phi(k) = kx - \omega(k)t$ einen Extremwert annimmt, derart, daß

$$\frac{d\Phi}{dk} = x - \frac{d\omega}{dk} t = 0$$

wird.

Da aber $d\omega/dk$ die Gruppengeschwindigkeit c_{gr} ist, lautet die Auswahlregel

$$c_{gr} = \frac{x}{t} = c_0 \frac{x}{c_0 t}. \quad (4)$$

Sie sondert aus dem Spektrum von $f(\xi)$ einen bevorzugten Wellenzug der Wellenzahl $k_0(x, t)$ aus, der nicht durch Interferenz mit anderen Wellen ausgelöscht wird. Die funktionale Verknüpfung zwischen k_0 und (x, t) ist wegen Gl. (4) auch in Abb. 2 dargestellt.

Um einem Mißverständnis vorzubeugen, sei hier eine kurze Bemerkung über die Bedeutung der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in diesem Zusammenhange eingefügt.

Die Welle k_0 läuft natürlich mit der ihr eigenen Phasengeschwindigkeit (Abb. 1), die somit nun

³ Zunächst gewinnt man durch Umformung des Exponenten:

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{k}{2b}\right)^2 + i[kx - \omega(k)t] \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-b \left(\xi - \frac{ik}{2b} \right)^2 \right] d\xi dk. \end{aligned}$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-b \left(\xi - \frac{ik}{2b} \right)^2 \right] d\xi$ ist dem über

die reelle ξ -Achse erstreckten $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-b\xi^2) d\xi$ gleichwertig, wie man erkennt, wenn man auf dem in Abb. 3 skizzierten geschlossenen Wege integriert.

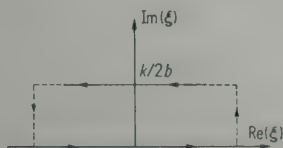


Abb. 3. Integrationsweg in der ξ -Ebene zur Berechnung der Gl. (3). Die gestrichelten Teile des Weges sind ins Unendliche verlegt zu denken.

auch eine Funktion von (x, t) wird (Abb. 6). Nun ist aber, wie im folgenden noch ausgeführt wird, auch die nähere k -Umgebung von $k_0(x, t)$, also eine Wellengruppe, am Aufbau des Wellenzuges beteiligt, und man könnte vermuten, daß dadurch die Gruppengeschwindigkeit c_{gr} an die Stelle der Phasengeschwindigkeit c_{ph} zu treten hätte. Es handelt sich jedoch hier nicht um eine Gruppe im üblichen Sinne, sondern um eine solche, innerhalb derer die Phasen aller beteiligten Komponenten gleich sind — denn das besagt ja der Ausdruck „stationäre Phase“ —, und diese bewegt sich wieder mit der Phasengeschwindigkeit.

Was bedeutet aber die Gruppengeschwindigkeit in der Gl. (4)?

Es sei x die auf dem Stab gemessene Entfernung vom Ort der Stoßanregung bis zu einem Punkt P, an dem der Wellenzug eine bestimmte Wellenzahl $k_0(x, t)$ habe. c_{gr} ist dann die Geschwindigkeit, mit der bei konstant gehaltenem k_0 der Punkt P sich fortbewegt. Die Bewegung von P ist gleichförmig.

Bisher wurde der Einfluß der Spektralfunktion $g(k) = \exp(-k^2/4b)$ ganz außer Acht gelassen, und in der Tat ist die Methode der stationären Phase bei Problemen dieser Art streng genommen nur auf unendlich schmale Impulse anwendbar, deren Spektralfunktion eine Konstante ist. Sie läßt sich jedoch, wenn man kleine Ungenauigkeiten in Kauf nimmt, auch dann anwenden, wenn die Spektralfunktion $g(k)$ mit k langsam veränderlich ist, verglichen mit der oszillierenden Funktion $\exp i k x$. Im hier behandelten Falle ist diese Bedingung um so besser erfüllt, je schmaler die Gauß-Kurve $\exp(-b\xi^2)$ wird.

Auf die nähere Umgebung von k_0 beschränkt man nun die Integration, indem man $\Phi(k)$ in eine Potenzreihe um k_0 entwickelt und nur deren erste Glieder berücksichtigt, von denen das zweite wegen $(d\Phi/dk)_0 = 0$ wegfällt:

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \Phi(k_0 + \kappa) = \Phi_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\Phi}{dk^2} \right) \kappa^2 \\ &= k_0 x - \omega_0 t - \frac{1}{2} t \frac{d^2\omega}{dk^2} \kappa^2 \\ &= k_0 x - \omega_0 t - \frac{c_0 t}{2} \frac{d}{dk} \left(\frac{x}{c_0 t} \right) \kappa^2. \end{aligned}$$

Damit wird aus dem Integral (3):

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi b}} \exp \left[-\frac{k_0^2}{4b} + i(k_0 x - \omega_0 t) \right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-i \frac{c_0 t}{2} \frac{d}{dk} \left(\frac{x}{c_0 t} \right) \kappa^2 \right] d\kappa. \quad (5) \end{aligned}$$

Die Umformung von (3) in (5) bedarf jedoch noch einer Rechtfertigung: Mit der Transformation der Integrationsvariablen k in κ wird auch eine entsprechende der Integrationsgrenzen notwendig, und wegen der Reihenentwicklung wird das Integrationsintervall auf eine kleine Umgebung von k_0 beschränkt. Macht man aber die Zeit t so groß, daß etwa $\frac{c_0 t}{2} \frac{d}{dk} \left(\frac{x}{c_0 t} \right) \varepsilon^2 > 5$ wird, worin ε den Bereich um k_0 abgrenzt, in dem die Funktion $\Phi(k)$ durch die ersten drei Glieder der Reihe noch hinreichend repräsentiert wird, so kann man die Integrationsgrenzen wieder ins Unendliche legen. Mit der Annahme, daß das dritte Glied nicht wesentlich kleiner ist, als die Summe der nachfolgenden, wird daher die endgültige Bedingung für die Äquivalenz der Integrale (3) und (5), in dimensionslosen Koordinaten geschrieben:

$$\left| \sqrt{\frac{a}{2\pi c_0 t}} \frac{d}{d(c_{gr}/c_0)} \left[\frac{d'(c_{gr}/c_0)}{d(a/\lambda)} \right] \right| \ll \left| \sqrt{\frac{d(c_{gr}/c_0)}{d(a/\lambda)}} \right|$$

bzw.

$$\left| \sqrt{\frac{a}{2\pi c_0 t}} \frac{d^2(c_{gr}/c_0)}{d(a/\lambda)^2} \right| \ll \left| \left[\frac{d(c_{gr}/c_0)}{d(a/\lambda)} \right]^{3/2} \right|.$$

Es zeigt sich so, daß die Integralumformung gerechtfertigt ist, wenn man nur die Zeit t groß genug wählt und Gebiete ausschließt, in denen $d(c_{gr}/c_0)/d(a/\lambda)$ sehr klein wird. Das sind in den Kurven der Abb. 2 die nahen Umgebungen der Extremwerte. Dort versagt also die hier angegebene Rechenmethode.

Für alle übrigen Bereiche ist die Integration von (5) möglich und elementar durchführbar. Dabei verläuft der Integrationsweg in der komplexen κ -Ebene in der in Abb. 4 skizzierten Weise, und zwar in verschiedenem Sinne für positive und für negative Werte von $\frac{c_0}{2} t \frac{d}{dk} \left(\frac{x}{c_0 t} \right)$, was aber lediglich eine Phasenverschiebung von

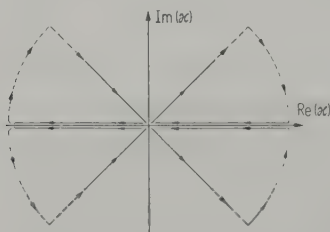


Abb. 4. Integrationswege in der κ -Ebene zur Berechnung der Gl. (6). Für $\frac{d}{dk} \left(\frac{x}{c_0 t} \right) < 0$ verläuft der Weg im I. und III., für $\frac{d}{dk} \left(\frac{x}{c_0 t} \right) > 0$ im II. und IV. Quadranten.

90° in der Welle beim Durchlaufen eines solchen kritischen Punktes bedeutet.

Aus (5) gewinnt man schließlich:

$$\varphi(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{ab c_0 t i}} \sqrt{\frac{d(a/\lambda)}{d(x/c_0 t)}} \times \exp \left[-\frac{k_0^2}{4b} + i(k_0 x - \omega_0 t) \right]. \quad (6)$$

Man sieht, daß die Amplitude außer von der Zeit t und der Spektralfunktion $\exp(-k_0^2/4b)$ im wesentlichen von der Steigung $d\left(\frac{x}{c_0 t}\right)/d\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ der Kurven in Abb. 2 abhängt. Bei deren Extremwerten müßte sie unendlich groß werden. Diese Stellen waren ja aber von der Integration ausgeschlossen worden, und man kann lediglich sagen, daß in ihrer nahen Umgebung wenigstens ein Maximum der Amplitude sein muß.

Der Amplitudenfunktion überlagert sich dann noch die Spektralfunktion, die ja auch wegen (4) nur von $x/c_0 t$ abhängig ist.

Um eine bildliche Vorstellung von dem bisher Gesagten zu erhalten, denkt man sich die Situation eine kurze Zeit t nach dem Auslösen der Stoßwelle (am Punkte $x=0$) etwa durch eine Momentaufnahme festgehalten.

Zunächst sei der Dehnwellenzug betrachtet. Seine Spitze hat die Strecke $x=c_0 t$ durchlaufen und die Welle $k_0'(x, t)$ nachgezogen (Abb. 5). (Durch die Bezeichnung $k_0'(x, t)$ soll daran erinnert werden, daß es sich hier um eine Welle mit einer — gemäß Abb. 2 — von $x/c_0 t$ abhängigen Wellenlänge handelt.) Der Wellenzug kehrt, wie man aus Abb. 2 sieht, bei $x/c_0 t=0,38$ seine Laufrichtung um und endet — als Oberflächenwelle — bei $x/c_0 t=0,58$. In Abb. 5 ist die aus Gl. (6) entnommene Amplitudenverteilung, allerdings ohne Berücksichtigung der Spektralfunktion, angedeutet.

Ein ähnliches Bild ergibt sich für den Biege- wellenzug. Hier liegt jedoch der Umkehrpunkt an dessen Spitze bei $x/c_0 t=0,64$.

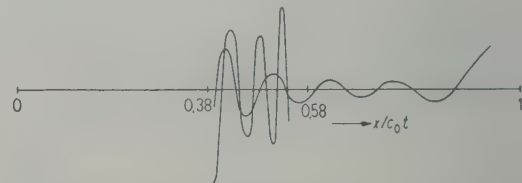


Abb. 5. Skizze einer Momentaufnahme t Sekunden nach der Stoßanregung. Die beiden Teilwellenzüge gehen bei $x/c_0 t=0,38$ mit einem Phasensprung von $\pi/2$ ineinander über. Bei $x/c_0 t=0,58$ liegt ein Häufungspunkt der Wellenberge. (Die Umgebung dieser beiden Stellen wurde in der Zeichnung fortgelassen.)

In Abb. 6 sind noch einmal die Wellengeschwindigkeiten für die Dehn- und die Biege-
welle wie in Abb. 1, aber in Abhängigkeit von $x/c_0 t$ gezeichnet. Auch hier ist die Doppelwertigkeit für beide Wellen zu erkennen.

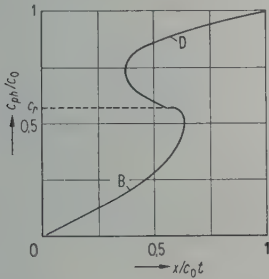


Abb. 6. Die Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit von Ort und Zeit.

Den Aufbau des Dehnwellenzuges vom Augenblick der Stoßanregung an kann man sich mit Hilfe der Abb. 7 veranschaulichen. Es sind die

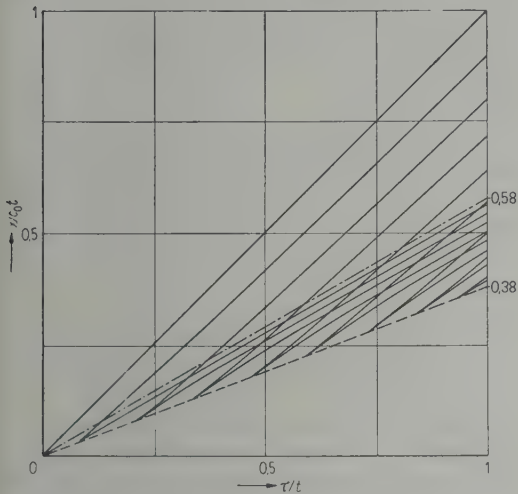


Abb. 7. Das Weg-Zeit-Diagramm für den Dehnwellenzug. Die Kurven kennzeichnen die Orte gleicher Phasen, z. B. die Gipfel der Wellenberge.

Wellenphasen als Funktion ihres Ortes x und der Zeit τ aufgetragen. (Die Zeit t dient hier lediglich der Normierung und ist als konstant zu betrachten.) Die ausgezogenen Kurven bezeichnen jeweils gleiche Phasen der Welle, z. B. deren Gipfelpunkte. Man sieht, wie diese Phasenkurven von einer in Abb. 7 mit 0,38 bezeichneten Geraden — der Diskriminantenkurve zur Differentialgleichung $dx/dt = c_{ph}(x, t)$, deren Lösungen die Phasenkurven sind — ausgehend in zwei Zweigen nach rechts oben laufen, einem steileren, der das Gebiet zwischen den Geraden 0,38 und 1 ausfüllt,

und einem flacheren, der auf den Bereich zwischen der Diskriminantenkurve 0,38 und der Asymptoten 0,58 der Kurvenschar beschränkt ist. Das Gebiet zwischen den Geraden 0,38 und 1 entspricht in Abb. 1 dem Bereich links des Minimums der Kurve D, das zwischen den Geraden 0,38 und 0,58 dem Bereich rechts davon, die Asymptote 0,58 der konstanten Geschwindigkeit der Oberflächenwellen.

Legt man durch einen Punkt τ/t eine zur $x/c_0 t$ -Achse parallele Gerade, so bezeichnen die Ordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Phasenkurven die Stellen $x/c_0 t$ (auf dem Stab), bei denen eben zur Zeit τ der Wellenzug seine Gipfel hat, und bewegt man die Parallele nach rechts, so gleiten auf ihr die Schnittpunkte aufwärts, ebenso, wie in Wirklichkeit die Wellengipfel auf dem Stab in die Richtung wachsender x laufen.

Abb. 8 beschreibt in ähnlicher Weise das Verhalten der Biege-
wellen. Die Diskriminantenkurve (0,64) ist hier die obere Begrenzungsgerade der Schar, die Asymptote (0,58) liegt etwas darunter.

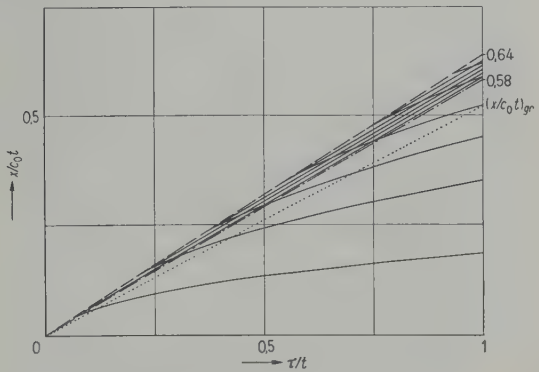


Abb. 8. Das Weg-Zeit-Diagramm für Biege-
wellen.

2. Das Experiment

Die wichtigste Forderung an die Untersuchungsmethode, die der Bestätigung der im vorangegangenen entwickelten Vorstellungen dienen soll, ist hier bei der Verworrenheit der sich stellenweise mehrfach überlagernden Wellenzüge die nach Übersicht und Anschaulichkeit. Es wurde daher die Methode gewählt, die diese Forderung am unmittelbarsten erfüllt, die visuelle Beobachtung.

Mittels eines elektrischen Funkens wird der in eine wassergefüllte Küvette getauchte Stahlstab angeregt. Die im Stab laufenden Wellen ziehen im Wasser Mache'sche Kopfwellen nach, die mit Hilfe des Töplerschen Schlierenverfahrens beobachtet bzw. photographiert werden. Der Be-

leuchtung dient dabei ein zweiter Funke, der eine kurze Zeit (etwa 10^{-4} s) nach der Stoßanregung ausgelöst wird.

In Abb. 9 ist die Schlieren-Anordnung mit der Verzögerungsschaltung skizziert. Durch eine Hochspannungsquelle H werden die Kondensatoren C_1 und C_2 und über den Widerstand R auch C_3 aufgeladen, bis die Überschlagnspannung der Hilfsfunkenstrecke F_1 mit der zu ihr in Reihe geschalteten Stoßfunkenstrecke F_2 erreicht ist. C_1 entlädt sich über F_1 und F_2 , und der Metallstab M wird dadurch an seinem unteren Ende zu einem heftigen Stoß angeregt. Durch die Entladung von C_1 wird der aus C_1 , C_2 und der Induktivität L bestehende elektrische Schwingungskreis angestoßen, so daß nach einer kurzen Zeit (etwa 10^{-4} s) die Spannung an C_2 ihr Vorzeichen wechselt. R ist so bemessen, daß C_3 während der Zeit des Umschlingens seine Spannung nahezu beibehält. An den Spitzen der Funkenstrecke F_3 entsteht eine Spannung, die zum Funkenüberschlag bei F_3 führt. Dadurch fließt in der Primärwicklung des Stoßtransformators T ein Stromstoß, der wiederum in der Sekundärwicklung von T eine hohe Spannung induziert. Der Kondensator C_4 lädt sich dadurch auf und entlädt sich über eine in einem Kapillarröhrchen geführte Funkenstrecke F_4 , die der Beleuchtung dient. F_4 wird mittels der Linsen vor und hinter der Küvette auf die Kante einer Schlierenblende B abgebildet, und der Metallstab in der Küvette durch ein Objektiv O auf die Mattscheibe S.

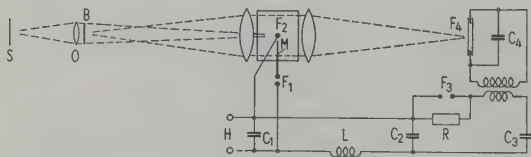


Abb. 9. Skizze der Versuchsanordnung für die Schlierenaufnahmen.

S: Mattscheibe,	H: Hochspannungsquelle,
O: Objektiv,	C_1, C_2, C_3 : Kondensatoren,
B: Schlierenblende,	F_1, F_2 : Hilfsfunkenstrecken,
M: Metallstab,	L: Induktivität,
F_1 : Stoßfunkenstrecke,	R: Widerstand,
F_3 : Beleuchtungs-	T: Stoßtransformator,
funkenstrecke,	C_4 : Hochspannungskondensator.

Die elektrische Anordnung ist ähnlich der Machschen Verzögerungsschaltung. Sie bietet jedoch ihr gegenüber den Vorteil, daß man mit wesentlich kleineren Spannungen, dadurch mit räumlich kleineren Kondensatoren und einer kleineren Induktivität, arbeiten kann. Die Hochspannung für die Beleuchtungsfunkenstrecke, die man für kurze Belichtungszeiten benötigt, kann man sich durch den einfach gebauten Stoßtransformator T schaffen. Der Beleuchtungskreis, be-

stehend aus der Funkenstrecke F_4 , dem Kondensator C_4 und den Leitungen zwischen F_4 und C_4 , kann auf diese Weise besonders induktionsarm aufgebaut werden.

3. Vergleich der Theorie mit dem Experiment

Mit dem eben beschriebenen Gerät wurden die Abb. 10 und 11 aufgenommen. Am unteren Rand der Bilder ist der Stoßfunke als weißer Fleck zu sehen. Das Ende des senkrechten Stahlstabes wird von ihm überstrahlt, so daß man die Art der Stoßanregung nicht erkennen kann. Sie wurde deshalb neben den Bildern skizziert. Die Spitze des Dehnwellenzuges ist bereits einige Zentimeter über die oberen Bildränder hinausgelaufen. Man sieht deutlich die ersten sich anschließenden Wellen als nahezu geradlinige, parallele Streifen. Ihre Intensität nimmt zunächst gemäß Abb. 5 bis zu einem Minimum hin ab. Die vorderste Front des Zuges tangiert die vom Stoßfunken ins Wasser abgestrahlte Kugelwelle. Sie erscheint auf der linken Hälfte, besonders der Abb. 10, schwarz, auf der rechten weiß, woraus man sieht, daß es sich um eine symmetrische Wellenform handelt⁴.

Die fischgrätenartige Struktur entsteht durch die Biegewelle. Sie ist als schiefsymmetrisch zu erkennen. Die breiten, nach hinten geschwungenen Streifen sind von schmalen Linien unterbrochen, die von dem Nachläufer der Dehnwelle unterhalb des eben erwähnten Amplitudenminimums herrühren.

Zum Zwecke der besseren Übersicht wurden die Abb. 10 und 11 in der linken Hälfte der Abb. 12 noch einmal skizziert. Der Dehnwellenzug D ist nur von seiner Spitze $x/c_0 t = 1$ bis zum Umkehrpunkt 0,38 zu verfolgen. Der anschließende Teil zwischen 0,38 und 0,58 ist auf den Abb. 10 und 11 nicht zu sehen und wurde deshalb auch in Abb. 12 nicht gezeichnet. Vermutlich sind die zur Ausbildung dieses Teilwellenzuges erforderlichen hohen Frequenzen im Stoßspektrum nicht enthalten, oder sie werden zum Aufbau anderer Wellenarten verwandt.

Die gebogenen Linien B in Abb. 12 stellen die Biegewellenstreifen dar. Sie laufen vom Stab bis zu der gestrichelten Geraden, wo sie umkehren und sich eigentlich der strichpunktierten Geraden asymptotisch nähern sollten. Jedoch sind wieder aus den eben genannten Gründen diese Fort-

⁴ Zu beachten ist, daß in allen Aufnahmen die Schlierenblende parallel zum Stab steht, so daß die am Stab laufenden symmetrischen Wellen antisymmetrisch erscheinen und antisymmetrische Wellen symmetrisch.

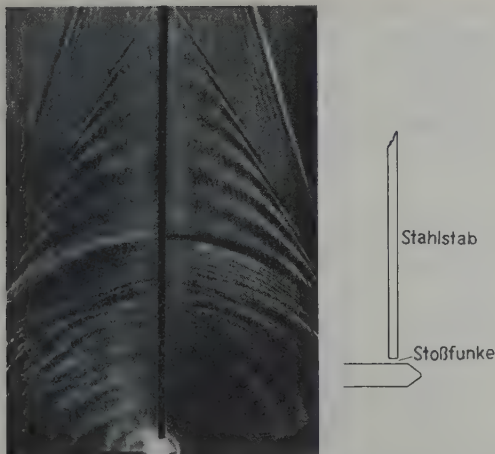


Abb. 10. Schlierenaufnahme der Ausbreitung einer Stoßwelle und Skizze zur Art der Stoßanregung. Der Durchmesser des runden Stahlstabes beträgt 1 mm.

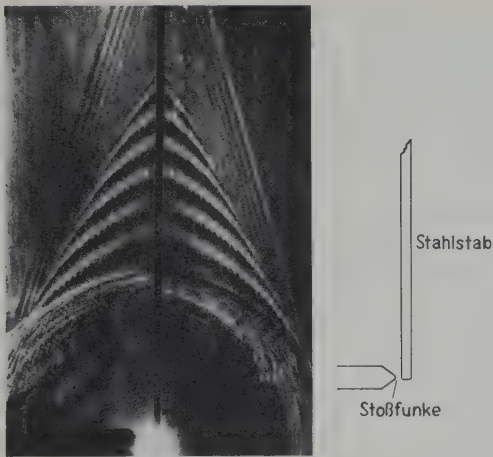


Abb. 11. Schlierenaufnahme wie in Abb. 10, nur mit andersartiger Stoßanregung.

setzungen der Streifen auf Abb. 10 nur ein kurzes Stück, auf Abb. 11 gar nicht zu sehen, und wurden deshalb auf Abb. 12 nur angedeutet. (Natürlich entspricht die gestrichelte Gerade der Diskriminantenkurve in Abb. 8 die strichpunktierte der Asymptoten.)

Verwunderlich ist auf den ersten Blick, daß in Abb. 10 und 11 der Abstand der Biegewellenstreifen, also scheinbar auch die Biegewellenlänge unterhalb eines bestimmten $x/c_0 t$ -Wertes —

in Abb. 8 mit $(x/c_0 t)_{gr}$ bezeichnet —, konstant wird, wie auch Abb. 13 zeigt (Kreuze). Die Erklärung ist folgende:

Eine Abstrahlung der auf dem Stab laufenden Wellen in das umgebende Wasser ist nur möglich, solange die Wellengeschwindigkeit auf dem Stab größer ist als die Schallgeschwindigkeit im Wasser. Das ist aber unterhalb des Punktes $(x/c_0 t)_{gr}$ für die Biegewellen nicht mehr der Fall. Die für dieses Gebiet ausgerechnete Welle k_0 ist zwar im Stab vorhanden, macht sich aber, weil sie nicht abgestrahlt wird, nicht bemerkbar.

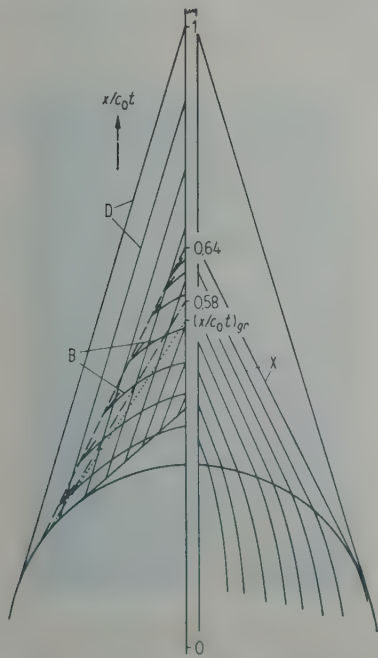


Abb. 12. Skizze zu Abb. 10 und 11.

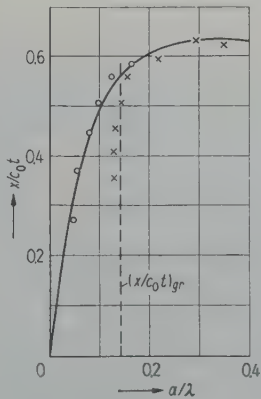


Abb. 13. Der linke Teil der Kurve B aus Abb. 2 mit eingetragenen Meßwerten.

Nun sollte man annehmen, daß im Bereich $x/c_0 t \ll (x/c_0 t)_{gr}$ gar keine Wellen abgestrahlt werden. Das hieße, daß im Gebiet rechts der in Abb. 12 punktiert gezeichneten Geraden die Biegewellenstreifen nicht auftreten dürften. Daß

sie trotzdem vorhanden sind, ist so zu verstehen, daß in diesem Bereich eine Welle konstanter Wellenzahl k_{gr} die Rolle der bisher betrachteten Welle k_0 übernimmt. Sie wird vom Stab eben noch (in zu ihm fast paralleler Richtung) ins Wasser abgestrahlt und tritt im Gebiet $x/c_0 t < (x/c_0 t)_{gr}$ mit einheitlicher Wellenlänge λ_{gr}^B und -geschwindigkeit allein auf. Es sei hier jedoch auf eine strengere Begründung verzichtet.

Der punktierten Geraden in Abb. 12 entspricht die ebenso markierte Gerade in Abb. 8.

Die Abb. 13 zeigt noch einmal den linken Teil der Kurve B aus Abb. 2, diesmal mit eingezeichneten Meßwerten. Die Kreuze bezeichnen die aus der Messung der Wellenlänge auf der Stabachse ermittelten Werte, die Kreise die im Gebiet links der in Abb. 12 punktierten Geraden gewonnenen. Die gestrichelte Gerade gibt den Wert a/λ_{gr}^B an, für den die Biegewellengeschwindigkeit im Stab gleich der Schallgeschwindigkeit im Wasser ist.

Für Dehnwellen wird in Abb. 14 die Theorie mit den Meßergebnissen verglichen. Die Dehn-

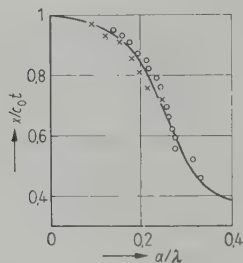


Abb. 14. Der linke Teil der Kurve D aus Abb. 2 mit eingezeichneten Meßwerten.

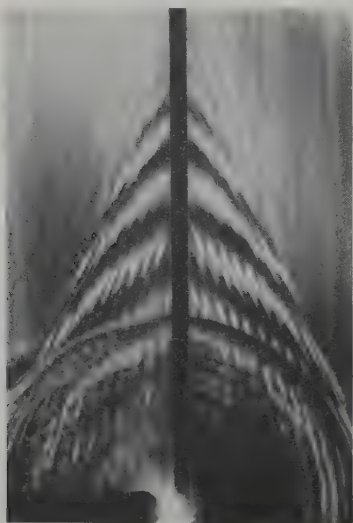


Abb. 15. Aufnahme eines 2 mm dicken, runden Stahlstabes. Die Anregung ist gleich der in Abb. 11.

wellengeschwindigkeit ist überall größer als die Schallgeschwindigkeit im Wasser. Eine Grenzwellen tritt daher nicht auf. Die Meßpunkte liegen mit geringen Abweichungen auf der der Abb. 2 entnommenen Kurve.

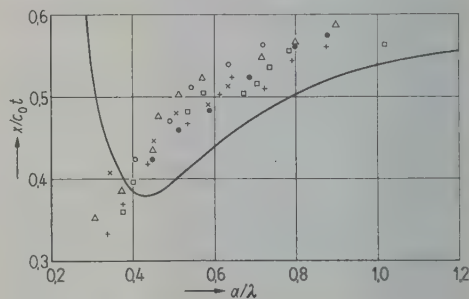


Abb. 16. Meßwerte für die X-Welle. Ein Teil der Kurve D aus Abb. 2 ist zum Vergleich eingezeichnet. Die verschiedenen Markierungen der Meßpunkte entsprechen den Auswertungen verschiedener Schlieraufnahmen.

Neben den bisher besprochenen beiden Wellenarten zeigt sich anscheinend noch eine dritte (Abb. 15 und 16), die, da ihre Zugehörigkeit noch ungeklärt ist, mit X-Welle bezeichnet werde. Jedenfalls ist sie von höherer Ordnung. Sie wird bei diesen Experimenten vorwiegend an dicken Stäben im Gebiet der Biegewellenstreifen (Abb. 15) beobachtet, und tritt dann, besonders bei seitlicher Anregung, viel stärker in Erscheinung als die Dehnwelle.

Im rechten Teil der Abb. 12 wurde die X-Welle gemäß Abb. 15 skizziert. Sie ist der hinteren

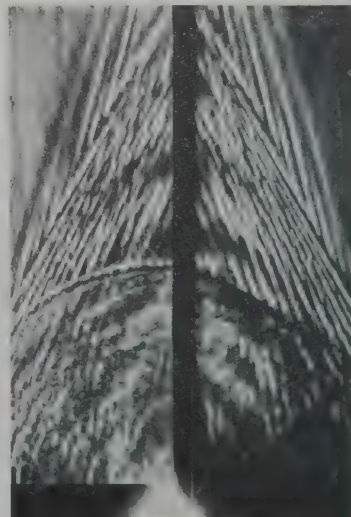


Abb. 17. Stoßwellenausbreitung in einem rechteckigen, 2 mm dicken und 10 mm breiten Stab. Die X-Welle ist als diejenige mit der geringsten Geschwindigkeit zu erkennen.

Gruppe des Dehnwellenzuges sehr ähnlich, unterscheidet sich aber von ihm durch eine etwas andere Laufgeschwindigkeit und vor allem dadurch, daß sie bis weit in den Bereich der Kugewelle zu verfolgen ist, während sich der Dehnwellenzug auf das Gebiet zwischen 0,38 und 1 in Abb. 12 beschränkt.

Vermutlich handelt es sich um die schiefssymmetrische Welle erster Ordnung, deren Gruppengeschwindigkeit etwa den durch die Meßpunkte in Abb. 16 angegebenen Verlauf haben muß. Leider liegen die Dispersionskurven für diese Wellenart nicht vor. Auch läßt sich mit Hilfe der Schlierenaufnahmen nicht eindeutig entscheiden, ob die Welle symmetrisch oder schiefssymmetrisch ist. Wahrscheinlicher ist das letztere. Den Abb. 13 und 14 entsprechend zeigt Abb. 16 für die X-Welle die Meßergebnisse, die aus einer größeren Anzahl von Aufnahmen gewonnen wurden. Zum Vergleich ist ein Teil der Dehnwellenkurve mit eingezeichnet.

Es wäre natürlich möglich, aus der Gestalt der gut sichtbaren Wellenstreifen auch die Phasengeschwindigkeiten der X-Wellen zu berechnen. Zweifellos aber würde sich für derartige Messungen doch die Anregung zu monochromatischen Wellen auf dem Stab besser eignen als die durch Stoßwellen. Es wurde deshalb hier auf die Messungen der Phasengeschwindigkeiten allgemein verzichtet.

Abschließend sei noch bemerkt, daß eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß die hier beschriebenen Wellenzüge bei der Bildung der Riffeln⁵ auf Eisenbahnschienen und auf Kugellagerschalen eine wesentliche Rolle spielen. Die Untersuchungen darüber sind jedoch noch nicht abgeschlossen.

(Eingegangen am 28. Juli 1954.)

⁵ Mit Riffeln sind wellenförmige Abnutzungserscheinungen auf den Laufflächen der Schienen bzw. der Kugellagerschalen gemeint.

Zusammenstellung der Bezeichnungen

a	= Radius des Stabquerschnitts,
B	= Biegewelle (schiefsymmetrische Welle niederster Ordnung),
b	= Maß für die Schärfe des Stoßes (Breite des Impulses: $1/\sqrt{b}$),
c_0	= Dehnwellengeschwindigkeit im Stab bei sehr großen Wellenlängen,
c_{ph}	= Phasengeschwindigkeit,
c_{gr}	= Gruppengeschwindigkeit,
D	= Dehnwelle (symmetrische Welle niederster Ordnung),
$f(\xi)$	= Anregungsfunktion (hier Impuls),
$g(k)$	= Spektralfunktion der Anregung,
k	= Wellenzahl,
$k_0(x, t)$	= mit x und t veränderliche Wellenzahl, die aus dem Spektrum k der Anregungsfunktion ausgesondert wird,
\vec{s}	= Auslenkungsvektor,
t	= Zeitpunkt, zu dem das Wellenbild betrachtet wird, vom Augenblick der Stoßerregung an gerechnet,
X	= X-Welle (wahrscheinlich schiefssymmetrische Welle 1. Ordnung),
x	= Abstand vom Stoßzentrum bis zu einem Ort $< c_0 t$ auf der Stabachse,
ε	= halbe Breite des am Aufbau eines Wellenzuges beteiligten Spektralbereichs um k_0 ,
λ	= Lamésche Konstante (nur in der dynamischen Grundgleichung),
λ	= Wellenlänge,
λ_{gr}^B	= Grenzbiegewellenlänge, die im Stab mit der Wasserschallgeschwindigkeit läuft,
μ	= Lamésche Konstante,
ξ	= Integrationsvariable in der x -Richtung,
ϱ	= Dichte des Metalls,
σ	= Poissonsche Konstante,
τ	= variable Zeit (im Gegensatz zur fest gewählten Zeit t),
φ	= Potentialfunktion (tritt hier als Fourier-Integral auf),
ω	= Kreisfrequenz.

Schrifttum

- [1] POCHHAMMER, L., J. reine angew. Math. **81** [1876], 324.
- [2] CHREE, C., Proc. Camb. phil. Soc. **14** [1889], 250.
- [3] BANCROFT, D., Phys. Rev. **59** [1941], 588.
- [4] HUDSON, G. E., Phys. Rev. **63** [1943], 46.
- [5] CZERLINSKY, E., Akust. Z. **7** [1942], 12.
- [6] MORSE, R. W., J. acoust. Soc. Amer. **20** [1948], 833.
- [7] HÜTER, TH., Z. angew. Phys. **1** [1949], 274.
- [8] DAVIES, R. M., Philos. Trans. **240** [1947], 375.

FREQUENCY IRREGULARITY IN ROOMS

by A. F. B. NICKSON and R. W. MUNCEY

Division of Building Research,
Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization,
Australia

Summary

Acoustical workers dissatisfied with classical reverberation time measurements have proposed other measurements, often on the basis of ease of instrumentation. Frequency irregularity is one which appears to be gaining favour. Comparisons are here made between the sound used in such a test and those commonly occurring in music. It is shown that the test overlooks a significant variable, namely that common sounds are frequency modulated. Comparative tests of frequency irregularity with pure and frequency modulated tones show that large differences occur.

Sommaire

Des acousticiens, que ne satisfont pas les mesures classiques du temps de réverbération, ont proposé de faire d'autres types de mesures d'une exécution facile. La mesure de l'irrégularité en fréquence est un type de mesure qui semble être de plus en plus envisagé. Dans le présent travail, on a comparé le son utilisé pour faire ce genre d'essais avec les sons qui sont couramment émis en musique. On montre que, dans le type de mesure en question, on ne tient pas compte d'une variable importante, la modulation en fréquence des sons usuels. Des mesures comparatives de l'irrégularité en fréquence montrent qu'il y a, à cet égard, de grandes différences entre des sons purs et des sons modulés en fréquence.

Zusammenfassung

Zur Ergänzung der klassischen Nachhallzeitmessungen wurden von den Akustikern andere Meßmethoden vorgeschlagen, unter denen die „frequency irregularity“ anscheinend besonders bevorzugt wird. Es werden hier Vergleiche angestellt zwischen den bei solchen Tests benutzten Schallvorgängen und solchen, die normalerweise in der Musik auftreten. Es wird gezeigt, daß man bei den Tests etwas sehr Wichtiges übersieht, daß nämlich die üblichen Schallvorgänge auch frequenzmoduliert sind. Vergleichsmessungen der „frequency irregularity“ mit reinen und frequenzmodulierten Tönen ergaben starke Abweichungen.

1. Introduction

For some time acoustical workers have been becoming increasingly dissatisfied with the classical reverberation time measurement as a basis for designing new auditoria or for assessing the performance of existing halls. This has led scientists to search for other criteria of measurements; those commonly adopted appear to have been chosen largely because of their ease of measurement rather than for their relation to any specific characteristic of common sounds.

One of the more prominent of these stems from an early proposal by WENTE [1] that the response of a space with a sound input of slowly varying frequency from a fixed loudspeaker should be measured at some other point and the resulting “transmission characteristic” curve studied. The idea was crystallised by BOLT and ROOP [2] who proposed a definition of frequency irregularity as being the average rate of change of the room response in dB per c/s generally considered over a band of at least one-eighth of an

octave. This proposal has been adopted by other workers [3], [4] who have suggested some changes and recently equipment for automatically recording the frequency irregularity has become commercially available [5]. This note seeks to issue a warning that such measurements, although probably interesting academically, entail assumptions which in an important way are not relevant to common sounds and may therefore be less valuable than would appear at first sight.

2. Common sounds

The speaking and singing voice, string instruments such as the violin, wind instruments such as the flute and percussion instruments such as drums, pianos or cymbals provide the sounds which are of importance in halls and auditoria. Of these the sounds of speech and of percussion instruments contain considerable transients which means that, even supposing a definite frequency can be determined, inevitably a not inconsider-

able frequency band is involved. For instance, a sound pulse consisting of twenty-five oscillations at a particular frequency F c/s requires a frequency band from $0.9 F$ to $1.1 F$ c/s to include 95 per cent of the sum of the magnitudes of the harmonics. The types of sound which can be sustained are normally both amplitude and frequency-modulated — the latter being the more important in the present connection. SEASHORE [6] and RICHARDSON [7] quote experiments which show that the human voice is frequency-modulated at the rate of about 6 c/s over a frequency range of plus and minus one semitone (one-twelfth octave). String instruments are likewise modulated by the performer shaking his hand, and modulation can be produced on the sounds made by wind instruments also.

In measuring frequency irregularity or its derivatives, on the other hand, the input sound is a pure tone, the frequency of which is changed sufficiently slowly so that it can be considered that the steady state at any frequency has been achieved. In these circumstances, there may occur many frequencies at which the transmission is down as much as 30 dB compared with nearby frequencies. On the other hand a frequency-modulated sound can be considered to be composed of sound at the carrier frequency and at a number of tones on either side. It seems most unlikely that all the significant sidetones would occur at frequencies of low transmission and therefore the overall transmission should not be nearly as irregular if a frequency-modulated rather than a pure tone is used for testing.

3. Experimental

To assess whether frequency modulation would greatly reduce the transmission irregularity, tests were made in three rooms, the volumes of which were 184 m³, 220 m³ and 450 m³, over a frequency range from 800 to 1000 c/s for which frequencies their respective reverberation times were 0.4, 0.7 and 2.0 s. The results were recorded with a level recorder and are reproduced in Fig. 1; the lower curves were obtained with pure tones and the upper curves with the tones frequency modulated at 6 c/s over a range of ± 3 per cent. While there is some similarity in the general shape of the two curves of each case, the change in irregularity is obvious; a reduction of about 3 to 1 occurred in all cases although this is by no means constant with change of reverberation time. Table I shows the frequency irregularity for each room calculated for the pure tone and for the frequency-modulated tone.

Table I

Room volume m ³	Reverberation time s	Frequency irregularity	
		Pure tone dB per c/s	f. m. tone dB per c/s
184	0.4	1.02	0.28
220	0.7	0.78	0.32
450	2.0	1.81	0.68

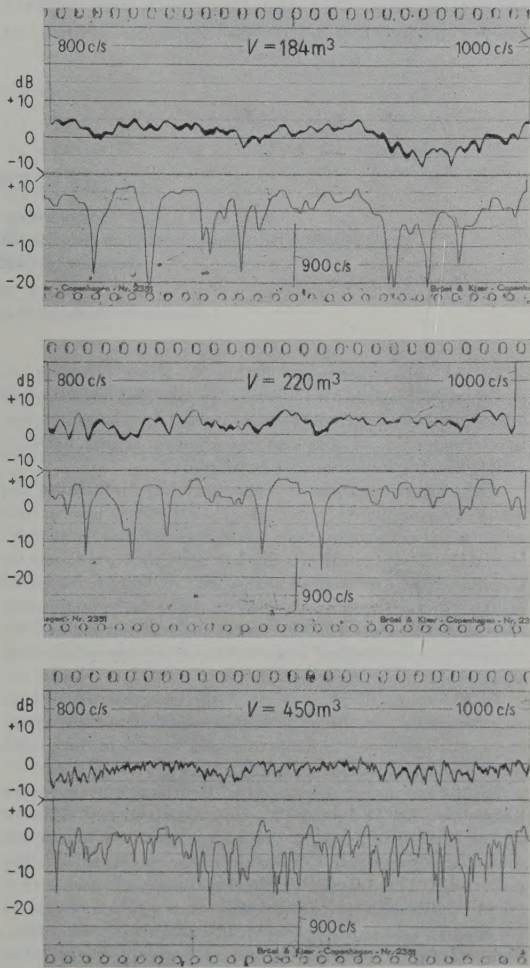


Fig. 1. Transmission curves for the three rooms, with pure and frequency-modulated tones.

4. Conclusions

It would appear to be dangerous to draw conclusions about the acoustics of a space from measurements of its frequency irregularity or any derivative therefrom in cases where the

original sound consisted of pure tones. On the other hand it cannot be immediately proposed that the adoption of a frequency-modulated signal will solve the problem as it is possible that the artist subconsciously changes the modulated characteristics of the sound to offset changes in the acoustics of the space. What is important is that the complexity of detail shown in an objective transmission-characteristic curve when taken with a pure sinewave is not matched with a comparable subjective complexity and it is suggested here that the transients and vibrato effects associated with the common sounds of

music greatly reduce the objective complexity associated with the present use of pure tones.

(Received 27th August, 1954.)

References

- [1] WENTE, E. C., J. acoust. Soc. Amer. **7** [1935], 123.
- [2] BOLT, R. H. and ROOP, R. W., J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 280.
- [3] SOMERVILLE, T. and WARD, F. L., Acustica **1** [1951], 40.
- [4] FURRER, W. and LAUBER, A., Acustica **2** [1952], 251.
- [5] BRÜEL, P. V., Acustica **4** [1954], 21.
- [6] SEASHORE, C. E., The psychology of music. McGraw-Hill Book Co., New York 1938.
- [7] RICHARDSON, E. G., Technical aspects of sound, Vol. I. Elsevier Publ. Co., Amsterdam 1953.

LETTER TO THE EDITOR

concerning the article by

"W. KUHL, Fehlermöglichkeiten bei Schalldämmungsmessungen bei tiefen Frequenzen I"
Acustica **4** [1954], Beiheft 2, 611

by V. M. A. PEUTZ

Laboratory for Technical Physics, Technological University, Delft

In the above mentioned article W. KUHL [1] discusses the possible errors with transmission loss measurements at low frequencies, especially those caused by the characteristic frequencies of the two reverberant rooms between which the transmission loss is measured.

Although these possible errors may have influenced the many measurements reported [2]...[9], they can in our opinion never explain that the measured low-frequency-insulation is systematically higher than that predicted by the mass law for random incidence; in fact a decreased insulation does not ever seem to have been measured. Moreover the curve of the transmission loss against the frequency is at the low frequencies always essentially the same in character ([7], Fig. 7).

Since our publication in 1953 we have carried out an extensive study on the subject, theoretical as well as experimental. It seems worth while to mention some of the results now. A more complete account will be published later.

Insulation measurements have been carried out in the Laboratory for Technical Physics at Delft in two different sets of reverberant rooms, the approximate volume of the rooms of one set being 15 m³, that of the rooms of the other set 1.1 m³. The surface of the partition-wall under test, mounted between the two rooms of a set, amounted to 3.6 m² and 1.1 m² respectively. The absorption, the diffusion and the volume of the rooms could be varied. The microphone could be moved during the measurements.

It was found that the shape of the insulation curve at low frequencies is in general independent of:

1. the volume of the loud and the quiet room,
2. the diffusion in these rooms,
3. the amount of absorption in these rooms,
4. the place of the microphone,
5. the material of the partition-wall [7].

It seems very unlikely therefore, if not out of the question, that the high insulation is caused by the natural frequencies of the rooms. The only way to influence the shape of the insulation curve at low frequencies proved to be local immobilization of the plate at its centre ([7], Fig. 8).

While dealing theoretically with the problem of insulation against sound at random incidence, the sound field is treated as a superposition of an infinite series of plane waves, each wave having its own frequency and angle of incidence, all frequencies in the frequency band considered and all angles of incidence being present. It is not surprising, however, that the calculations based on this representation are not always satisfactory. Such a situation can only be achieved by assuming each wave to be present for a finite period of time only. Apart from such a limitation in time there are always limitations in space too. The dimensions are never, as in the above mentioned representation, infinite but always limited.

Transient phenomena, radiation impedances etc. will determine the movement and the radiation of the wall and thus the insulation.

If this is true the difference in insulation at low frequencies of a slit in the middle of a wall and of a slit at the side of that wall may be expected to be similar in character to the difference in insulation at low frequencies of a plain

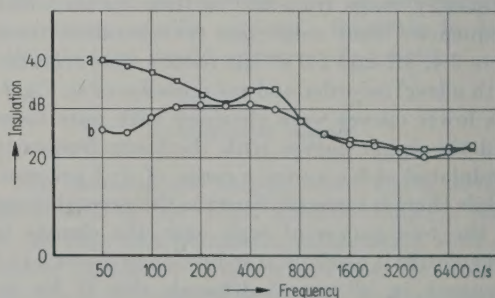


Fig. 1. The insulation for reverberant sound of a wall with a slit;
curve a: the slit being in the middle of the wall,
curve b: the slit being at the side of the wall.
(The slits are 4 mm broad and 125 mm deep.)

wall without and with a support in the middle of the wall respectively.

The insulation of a slit may be compared to that of a wall indeed since both are governed at low frequencies by the respective masses; besides, the air in a slit and a wall can be considered to behave similarly with respect to obliquely incident sound.

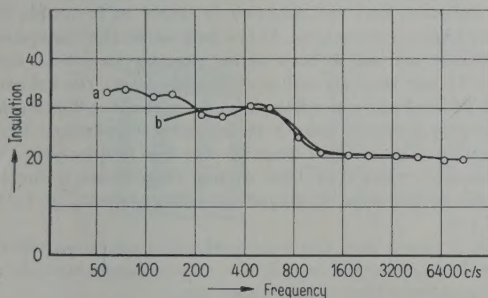


Fig. 2. The calculated and measured insulation for reverberant sound of a wall with a slit in the middle; curve a: measured, curve b: calculated. (The slits are 8 mm broad and 125 mm deep.)

The difference in insulation of two slits, one in the middle and the other at the side of a wall, turned out in fact to be similar in character to that found for a wall with and without stud (compare Fig. 1 of this letter to Fig. 8 of [7]).

The absolute value of the insulation at low frequencies turned out to be much higher than that predicted by mass law, even higher than the result of a theory based on the usual statistics (not yet published). The latter statement is demonstrated in Fig. 2 (compare also with Fig. 2...6 of [7]).

Summarizing, it seems proved that the explanation of the improvement of the insulation at low frequencies has to be sought in a better statistics for reverberant sound taking also into account the finite dimensions in space and time.

(Received 2nd December 1954.)

References

- [1] KÜHL, W., *Acustica* **4** [1954], Beiheft 2, 611.
- [2] LONDON, A. J., *J. Res. nat. Bur. Stand.* **42** [1949], 605.
- [3] LONDON, A. J., *J. acoust. Soc. Amer.* **22** [1950], 270.
- [4] SCHOCH, A. and FEHÉR, K., *Acustica* **2** [1952], 189.
- [5] BRANDT, O., *Proc. of the 1st ICA-Congress Electroacoustics*, Netherlands 1953 and *Acustica* **4** [1954], 281.
- [6] KOSTEN, C. W., *ibid.* p. 263.
- [7] PEUTZ, V. M. A., *ibid.* p. 281.
- [8] PUJOLLE, J. and LAMORAL, R., *ibid.* p. 284.
- [9] WATERHOUSE, R. V., *ibid.* p. 290.

LETTER TO THE EDITOR

concerning the article by

"A. BERGASSOLI, F. CANAC et TH. VOGEL, Sur la transmission du son par des hublots sphériques" (*Acustica* **4** [1954], 471)

by M. C. JÜNGER and P. W. SMITH, JR.

Acoustics Research Laboratory, Harvard University Cambridge, Massachusetts

The good low-frequency sound insulation which BERGASSOLI, CANAC, and VOGEL found for partitions in the form of spherical caps can also be expected to exist for thin cylindrical shells. The possible applications of this feature of cylindrical shells to architectural acoustics, aircraft fuselage design, and similar problems make this point worth discussing.

CREMER has analysed the sound insulating properties of an extended thin, flat plate [1] and shown that they are controlled by the relative magnitudes of the phase velocity, c_b , of flexural waves and of the "forced" velocity, $c_f = c_s/\sin\theta$, of the trace of the incident sound waves along the plate. (The quantity c_s is the sound velocity in air and θ is the angle of incidence relative to the normal to the plate.) When, through the variation of frequency and angle of incidence, the velocities c_b and c_f become equal, the well-known "coincidence phenomenon" is observed, and the sound insulation provided by the plate is essentially negligible. The lowest frequency for which the coincidence phenomenon occurs is designated the "critical frequency" and corresponds to grazing incidence at a frequency for which c_b equals c_s . As normal incidence is approached, the coincidence phenomenon is observed at increasingly higher frequencies. Finally, for nearly normal incidence, the situation is quite different, in that boundary effects and non-flexural vibrations are of predominant importance.

Another approach to the problem is used by VOGEL in his analysis of a finite plate, presented in Reference [3] of the paper under discussion. According to this analysis, the major part of the sound energy transmitted through the

panel is associated with modes of panel vibration excited in a nearly resonant fashion by the incident sound waves.

The two approaches are really quite similar in viewpoint, if the free wave is considered as the natural vibration of an infinite structure, i. e. as a vibration that can sustain itself in the absence of driving forces. In an infinite structure there is a continuous spectrum of resonances, while the finite structure is characterized by a finite spectrum. Otherwise, however, the vibrations of the finite system are modified only to a limited extent by the boundary conditions if the dimensions are large compared to the wavelength [2]. The fundamental concept is that the matching of wavelengths (i. e. spatial distribution) and frequencies between the forcing sound wave and the natural vibration results in negligible sound insulation. Furthermore, since, at resonance, the panel impedance goes through zero, its value is necessarily less than the impedance presented by the equivalent mass in the absence of elastic forces over a broad frequency region containing the resonant frequency. Therefore the insulation must be generally less than that predicted by the simple mass law.

When one analyses the propagation of waves in a cylindrical shell with these principles in mind, the situation is found to be radically different from that which obtains for the flat plate. First, note that when a plane wave is expanded in cylindrical coordinates into a series of modes with angular dependence of the type $\cos n\theta$ (where n is an integer and θ the angular coordinate), the amplitudes of the various partial modal pressures at the cylindrical surface are proportional to $J_n(\omega a/c_s)$, where ω is the circular

frequency and a the shell radius. At low frequencies, i. e. when the arguments of the Bessel functions are small, the pressure amplitudes decrease rapidly with increasing n . Therefore only the first few orders of n will be significant in the problem of sound insulation. The results of the analysis of axisymmetrical waves ($n = 0$) [3], show that the phase velocity starts out at low frequency asymptotically to the "bar velocity", i. e.:

$$c_z = c_0 = \sqrt{E/\rho}, \quad (1)$$

where E is the Young's modulus and ρ the density of the shell material. This is a value greatly in excess of the velocity of a flexural wave in a flat plate which vanishes at zero frequency and increases only slowly. The wave in a cylindrical shell retains a high value of phase velocity, until the frequency approaches the natural frequency for uniform extensional vibrations of a ring:

$$\omega_0 = c_0/a. \quad (2)$$

Near this frequency the velocity drops sharply to approach asymptotically, from above, the value of the velocity of a flexural wave in a flat plate. The minimum value of the phase velocity, which occurs near the frequency given in Eq. (2), is roughly

$$c_z \approx c_0 \sqrt{h/a} \quad (3)$$

where $2h$ is the thickness of the shell wall.

The implications of this dependence of axial velocity upon frequency can best be illustrated by giving some numerical results for a specific case, viz. for cylindrical steel shells. Because the low frequency velocity is so high, the coincidence phenomenon cannot occur for any except nearly normal sound waves at frequencies below about $(800/a)$ c/s (where a is the radius in meters). More precisely, the shell will be stiffness-controlled (i. e. will maintain a high impedance) in this frequency region except for waves incident at an angle of 3.8° or less to the normal. For

random incidence, the shell will therefore offer good insulation for a large portion of the incident sound energy. Moreover, even in the frequency region defined by Eq. (2) where the lowest phase velocities prevail, a critical frequency associated with grazing incidence, such as that defined for the flat plate, does not exist if the ratio h/a is greater than about 0.004.

The analysis of waves which are not axially symmetric [4] indicates that the situation is nearly as favorable for these higher order modes. At low frequencies the axial phase velocities are not as high as for the axisymmetrical case ($n = 0$), but they are still considerably above the velocity of a flexural wave in a flat plate. As in the $n = 0$ case, the velocities decrease sharply at the natural frequency for a ring (Eq. (2)) and also drop at very low frequencies. The minimum velocity at high or low frequencies is for all modes of the order of magnitude of the velocity given in Eq. (3).

It is hoped that this semi-qualitative reasoning will be corroborated by the results of a more rigorous analysis of the problem which is now under way.

Illuminating discussions on this problem with Professor L. CREMER, University of Berlin, are gratefully acknowledged.

(Received December 2nd, 1954.)

References

- [1] CREMER, L., Akust. Z. **7** [1942], 81. For a short summary, see KOSTEN, C. W., Acustica **4** [1954], 263.
- [2] See, e. g., LOVE, A. E. H., Mathematical theory of elasticity; fourth edition. University Press, Cambridge 1939, pp. 549 and 552.
- [3] JUNCER, M. C. and ROSATO, F. J., J. acoust. Soc. Amer. **26** [1954], 709.
- [4] SMITH, P. W., Jr., Phase velocities and displacement characteristics of free waves in a thin cylindrical shell. To be published in J. appl. Mech.

Buchbesprechung

Grimsehl, Lehrbuch der Physik, Band 1, Mechanik, Wärmelehre, Akustik. 15. Auflage, herausgegeben von W. SCHALLREUTHER, Greifswald. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1954, 622 Seiten, 722 Abb., 23×16 cm², Ganzleinen DM 21,40.

Die neue, völlig überarbeitete Auflage des „Grimsehl“ ist für den akustisch Interessierten allein deswegen bemerkenswert, weil hier nicht mehr die Akustik in Form einer um Stimmgabel, Monochord und schallempfindliche Flamme bereicherten „Schwingungslehre“ dargeboten wird. Die völlige Überarbeitung hat vielmehr auch diesen Rahmen gesprengt und gibt dem Studierenden ein Buch an die Hand, das ihm mit der allgemeinen Experimentalphysik auch die Grundlagen der experimentellen Akustik in leicht verständlicher Form nahebringt. Auf 60 Seiten, von denen die Schwingungslehre abgetrennt ist, finden wir hier Einzelheiten über die Hörkurve, die Phonskala, Schallanalyse, Schlieraufnahmen von Schallwellen, Schallreflexion und

-beugung usw. Es ist die Rede von Schallfeldgrößen, Mikrofonen, Rayleighscheibe, vom Schallstrahlungsdruck, von Wirkungen des Ultraschalls, von akustischen Widerständen und Filtern, von Quarzstrahlern und magnetostriktiven Sendern, um damit nur einige Begriffe zu nennen, die zum großen Teil bisher in Lehrbüchern der Experimentalphysik nicht zu finden waren.

Bei einer weiteren Auflage sollte jedoch berücksichtigt werden, daß das Weber-Fechnersche Gesetz nur eine sehr grobe Annäherung an die wirklichen Verhältnisse darstellt und daß demzufolge seine konsequente Anwendung Verwirrung stiften muß. Ferner erscheinen noch einige kleinere Berichtigungen notwendig.

Alles in allem darf gesagt werden, daß hier, wie fraglos auch auf allen anderen Sachgebieten dieses Bandes, die Neubearbeitung zu einem wirklich zeitnahen Lehrbuch geführt hat.

G. Kurtze.